التحليل العددي :- هو عملية أيجاد حلول عددية الى مسائل يصعب حلها بالطرق التحليلية . 1

يعض الشرح ← $e^{x}-x-1=0$

انواع الاخطاء :-

تعريف :- اذا كانت $\overset{x}{c}$ يمثل القيمة التقريبية وكانت $\overset{x_1}{t}$ يمثل القيمة المضبوطة فان الخطاء المطلق يعرف بالشكل :-

$$e = |t-c|$$

اما الخطاء النسبي يعرف بالشكل :-

$$e_r = \left|\frac{e}{t}\right| = \left|\frac{t-c}{t}\right|$$

اولاً أخطاء الصياغة :- ان بعض المسائل التي نصادفها قد يصعب وضعها في في نموذج نستطيع التعامل معه . لذلك نلجأ الى تبسيطها عن طريق وضعها بنموذج تقريبي مما يؤدي الى حدوث خطأ يسمى بـ خطأ الصياغة .

ثانياً أخطاء الالة :- مهما كانت دقة صناعة الالة فهناك أحتمال وجود خطأ نسبية أستعمالها . فمثلاً ادوات القياس مهما كانت دقة قياسها فهي محددة كالموازين واجهزة قياس الضغط الجوي ودقة والحاسب الالي فهي تختلف حسب قدرة الجهاز ونوعيته وتصميمه الامر الذي يترتب عليه استحداث أخطاء نسبية أستخدامها .

ثالثاً خطأ البتر وهو الخطأ الناتج من أستبدال عملية غير منتهية بعملية منتهية فمثلاً المفكوك اللانهائي

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

يستبدل بـ

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^9}{9!}$$

ففي هذه الحالة يكون الخطأ هو الجزء المبتور من المتسلسلة اللانهائية .

رابعاً أخطاء التقريب :- وهي الأخطاء الناتجة من تقريب العدد الى مراتب محددة ينتج عنه خطأ فمثلاً اذا كان العدد $X=0.126481$ يمكن تقريبه الى العدد $X=0.1265$ او العدد $X=0.13$ وهذا يؤدي الى حدوث خطأ عند أجراء العمليات الحسابية .

خامساً أخطاء التراكم :- وهي أخطاء ناتجة من أجراء عمليات حسابية متعاقبة على أرقام تحتوي أصلاً على أخطاء مما يؤدي الى تزايد هذه الأخطاء .

مثال اذا كانت القيمة التقريبية 0.235 وكانت القيمة الحقيقية 0.2346 أوجد الخطأ النسبي و الخطأ المطلق .

الخطأ المطلق

$$e=|t-c|=|0.2346-0.235|=0.0004$$

الخطأ النسبي

$$e_r=\left|\frac{t-c}{t}\right|=\frac{0.0004}{0.2346}=0.0017$$

حل المعادلات

يستعمل مصطلح حل المعادلة للتعبير عن عملية ايجاد قيمة المجهول X التي تحقق المعادلة أي اختزال المعادلة

وهذه القيمة التي تحقق المعادلة تسمى جذور المعادلة وعدد هذه الجذور يعتمد على درجة المعادلة.

$$2X+3=0 \quad \Rightarrow \quad X=-\frac{3}{2}$$

وهذه المعادلة هي معادلة من الدرجة الاولى لذلك لها جذر واحد.

اما في حالة كون المعادلة من الدرجة الثانية على صورة $aX^2+bX+c=0$ فان طريقة حلها تتم بأستخدام القانون:-

$$X=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مثال :- اوجد حل المعادلة $X^2+3X+2=0$

$$X=\frac{-3\mp\sqrt{9-4\times2\times1}}{2\times1}=\frac{-3\mp\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\mp1}{2}$$

اي ان جذري المعادلة هما $X=-2$, $X=-1$

اما في حالة كون المعادلة من الدرجة الثالثة فما فوق او احتوائها على دوال مثلثية او أسية فان حلها عادة ما يكون صعب بالطرق العادية لذلك يتم اللجوء الى الطرق العددية.

مثال

$$X-\cos X=0$$

$$e^X-X-2=0$$

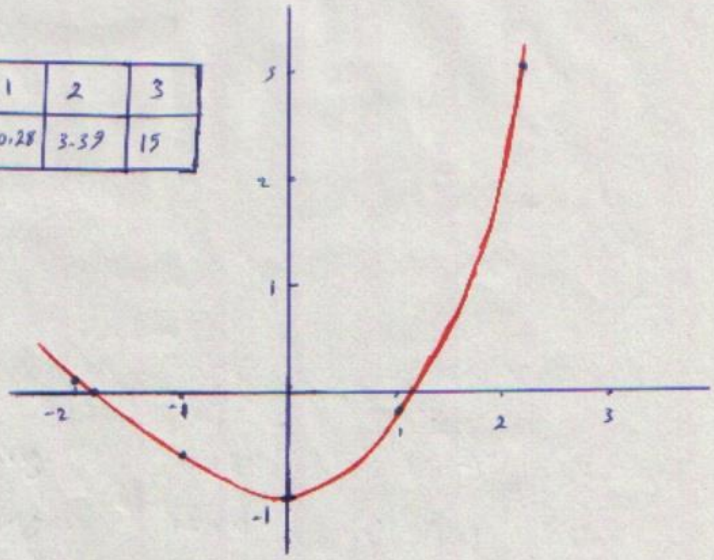
$$\log X+X-10=0$$

١- طريقة الرسم :- اذا كانت $g(x)$ دالة حقيقية مستمرة فيتم تحديد جذور المعادلة بطريقة الرسم أما عن طريق رسم الدالة $y=g(x)$ وفي هذه الحالة تكون جذور المعادلة هي نقاط تقاطع المنحني مع المحور X . او عن طريق كتابة الدالة بالصورة $g_1(x)=g_2(x)$ وفي هذه الحالة فان جذور المعادلة هي نقاط تقاطع المنحنيين . (تحدد $h=$؟)

مثال أوجد المعادلة $g(x)=e^x-X-2=0$ بيانياً $\alpha\in[2,3]$ ؟ اذا كان $h=1$

الحل $g(x)=e^X-X-2=0$

X	-2	-1	0	1	2	3
g(X)	0.13	-0.63	-1	-0.28	3.39	15



نلاحظ ان نقاط تقاطع الدالة مع المحور X هي $X=1.1$, $X=-1.8$

ملاحظة المثال السابق يمكن حله بجعل $g_1(x)=e^X-2$, $g_2(X)=X$ حيث

$$e^X-X-2=0$$
$$e^X-2=X$$
$$g_1(x)=g_2(x)$$

$y=e^X-2$

X	-2	-1	0	1	2	3
$g_1(x)$	-1.86	-1.63	-1	0.72	5.4	18

$y=x$

x	-2	-1	0	1	2	3
$g_2(x)$	-2	-1	0	1	2	3

وكحالة خاصة من طريقة لاكرانج عندما يكون عدد النقاط = 2 تكون درجة المتعددة $n=1$ والقانون يكون بالشكل :-

$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f_1$$

$$\Rightarrow P_1(x) = \frac{f_0-f_1}{x_0-x_1} x + \frac{x_0 f_1 - x_1 f_0}{x_0-x_1}$$

الاستكمال الخطي :- اذا كانت $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ نقطتين معلومتين فان صيغة لاكرانج للاستكمال تصبح بالشكل :-

$$p(x) = \left(\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right) x + \left(\frac{a f(b) - b f(a)}{a-b}\right)$$

مثال :- أوجد متعددة الحدود بصيغة لاكرانج للاستكمال الخطي التي تمر بالنقطتين $(1,3)$, $(2,5)$ ثم أوجد قيمة الدالة عندما $x=2.5$

الحل

$a=1$, $f(a)=3$, $b=2$, $f(b)=5$, $x=2.5$

$$p(x) = \left(\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right) x + \left(\frac{a f(b) - b f(a)}{a-b}\right)$$

$$= \frac{3-5}{1-2} x + \frac{1\times5 - 2\times3}{1-2}$$

$$= \frac{-2}{-1} x + \frac{-1}{-1} = 2x+1$$

$$p(x) = 2x+1$$

$$\therefore p(2.5) = 2\times2.5+1 = 6$$

مثال :- أوجد متعددة الحدود بصيغة لاكرانج للاستكمال الخطي التي تمر بالنقطتين $(0,-2)$, $(2,4)$ ثم أوجد قيمة الدالة عندما $x=3$ ،

$3x-2$

7

مثال :- أوجد متعددة الحدود بصيغة لاكرانج للاستكمال الخطي التي تمر بالنقطتين $(1.1, 3.00466)$, $(1.2, 3.3201169)$ ثم أحسب قيمة الخطأ المطلق عندما $x=1.23$ اذا كانت $P(x)=e^x$.

$P(1.23) = 3.154567x - 0.09653659$, $E = 0.006475566$

تعريف :- تسمى الدالة $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ متعددة حدود من الدرجة n . فالدالة $p(x)=a_0+a_1x$ هي متعددة حدود من الدرجة 1 والدالة $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ هي متعددة حدود من الدرجة 2.

الاستكمال :- هو عملية البحث عن صيغة جبرية يمكن التعامل معها من البيانات المتوفرة لدينا.

الاستكمال بطريقة لاكرانج :- في هذه الطريقة يتم ايجاد متعددة حدود من الدرجة n تمر بالنقاط المعلومة $(x_0,f_0),(x_1,f_1),\dots,(x_n,f_n)$ حسب العلاقة

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\cdot f(x_i)\ ,\quad L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$$P_n(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+\dots+L_n(x)f(x_n)$$

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

ملاحظة :- درجة الحدودية (متعددة الحدود) تساوي عدد النقاط - 1 .

مثال باستخدام طريقة لاكرانج للاستكمال أوجد القيمة التقريبية للدالة $p(x)$ عند النقطة $x=0.5$ للنقاط $(2,1),(1,2),(0,1)$.

$\boxed{f(x)=-x^2+2x+1}$ $\quad x_0\ f_0 \quad x_1\ f_1 \quad x_2\ f_2$

ثم اوجد الخطأ المطلق اذا كانت $f(x)=e^x$.

$e=0.1$

الحل عدد النقاط = 3 ، متعددة الحدود من الدرجة 2 $\Leftarrow n=2$.

$$P_2(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\times 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\times 2+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\times 1$$

$$=\tfrac{1}{2}(x^2-3x+2)+(-x^2+2x)2+\tfrac{1}{2}(x^2-x)=-x^2+2x+1$$

$$\therefore P_2(0.5)=\frac{(0.5-1)(0.5-2)}{2}+\frac{(0.5-0)(0.5-2)}{-1}\times 2+\frac{(0.5-0)(0.5-1)}{2}\times 1$$

$$=\frac{0.5\times-1.5}{2}+\frac{0.5\times-1.5}{-1}\times 2+\frac{0.5\times-0.5}{2}\times 1$$

$$=0.375+0.75\times 2-0.125\times 1=0.375+1.5-0.125=1.75$$

$e=|t-c|$
$=1.75-1.64$
$=0.1013$

3- طريقة نيوتن :- اذا كانت الدالة $f(x)\neq 0$ قابلة للتفاضل على الفترة $[a,b]$ التي تحتوي على الجذر α ، فان هذه الطريقة تتلخص بانه اذا بدأنا بالقيمة الابتدائية x_1 القريبة من الجذر α فان مماس الدالة $y=f(x)$ عند النقطة $P_1(x_1,f_1)$ يتقاطع بمحور السينات عند النقطة x_2 والتي تحسب من طريق حساب ميل المماس عند النقطة $P_1(x_1,f_1)$:-

$$f'(x_1)=\frac{0-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow x_2=x_1-\frac{f_1}{f_1'}$$

كما يمكن حساب x_3 وهي نقطة تقاطع المماس عند النقطة $P_2(x_2,f_2)$ ومحور السينات

$$x_3=x_2-\frac{f_2}{f_2'}$$

وهكذا نحصل على

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

خوارزمية الحل :-

① يتم تحديد المعطيات $f(x)$ ، $f'(x)$ ، x_1 ، ϵ

② $i=1$

③ يتم حساب $x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

④ اذا كان $|x_{i+1}-x_i|<e$ فان $\alpha=x_{i+1}$.

⑤ $i=i+1$ والرجوع الى الخطوة (3)

ملاحظة: في بعض الحالات عندما تكون $f'(x_n)=0$ فان هذه الطريقة تفشل في ايجاد الجذر المطلوب .

مثال: أوجد جذر المعادلة $f(x)=x^2-4$ في الفترة $[0,6]$ اذا كانت $x_1=5$ ، $\epsilon=0.2$.

الحل

① $f'(x)=2x$

② $$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^2-4}{2x_i}=\frac{2x_i^2-x_i^2+4}{2x_i}=\frac{x_i^2+4}{2x_i}$$