محاضرات الدكتور نوري فرحان المياحي
في
Algebra (Group) I (1) جبر الزمر

تعتبر نظرية الزمر من المواضيع الأساسية في الرياضيات بصورة عامة وفي الجبر بصورة خاصة ، وقد ظهر مفهوم الزمرة في القرن التاسع عشر نتيجة محاولات لإيجاد الحلول الجبرية لمتعددات الحدود ، ففي عام 1770 م درس العلام الفرنسي لاكرانج الزمر S_2, S_3, S_4 لعلاقتها بحلول معادلات من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة، وفي عام 1824 م اثبت النرويجي ابل استحالة ايجاد قانون عام لحل معادلات الدرجة الخامسة، وبعد دراسة الفرنسي كالوا أعمال كل من لاكرانج وابل في عام 1832 م المعادلات الجبرية بالزمر. واكتشف الشروط التي يجب توفرها في معادلة درجتها اكبر أو تساوي خمسة لكي يكون لها حلا جبريا.

1. العمليات الثنائية **Binary Operations**
2. الزمر وخواصها **The groups and Its properties**
3. زمرة الأعداد الصحيحة معيار n **Group of Integers Modulo** n
4. الزمرة التناظرية **Symmetric Groups**
5. الزمر الجزئية **Subgroups**
6. الزمر الجزئية السوية **Normal Subgroups**
7. التشاكل الزمري **Isomorphic of Groups**
8. حاصل الضرب المباشر للزمر **Direct product of groups**

References المصادر

[1] باسل عطا الهاشمي واخرون " نظرية الزمر " وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، العراق الطبعة الأولى ، 1982.

[2] بيرتون د.م " مقدمة في الجبر المجرد الحديث" ترجمة عبد العال جاسم محمد وسناء عبد محمد، جامعة الموصل، الطبعة الأولى ، 1982.

[3] عادل سوران واخرون " الرياضيات المعاصرة (البنى الجبرية)" مؤسسة الرسالة للطباعة والنشر بيروت، 1972.

[4] عادل غسان نعوم و باسل عطا الهاشمي " مقدمة في أسس الرياضيات" جامعة بغداد، 2000.

[5] فالح عمران الدوسري و عبد الحميد عمر احمد " المدخل إلى نظرية الزمر " جامعة ام القرى ، مكة المكرمة، الطبعة الثانية، 2001 .

[6] فالح عمران الدوسري" مقدمة في البنى الجبرية" جامعة أم القرى ، مكة المكرمة، الطبعة الثانية ،2006

[7] هادي جابر مصطفى وآخرون " أسس الرياضيات " الجزئيين الأول والثاني ، جامعة البصرة ، 1983.

[8] هادي جبر مصطفى واخرون " الجبر" جامعة البصرة الطبعة الأولى، 1993

[9**]** Burton D. M." Introduction To Modern Abstract Algebra"1967, London.

[10**]** David M. Burton" Abstract Algebra"1988, WM.C. Brown Publishers.

1. العمليات الثنائية Binary Operations

تعريف (1.1)

لتكن G مجموعه غير خاليه ، فكل داله من حاصل الضرب الديكارتي $G\times G$ إلى G تسمى عمليه ثنائيه على G.
فإذا رمزنا للعملية الثنائية على المجموعة G بالرمز $*$ فأن $*$ تمثل الدالة $*:G\times G \longrightarrow G$. إذا كان الزوج المرتب (a,b) عنصراً في $G\times G$ فنرمز إلى صورته بالرمز $a*b$ بدلا من $*((a,b))$.

ملاحظة

لتكن $*$ عمليه ثنائيه على المجموعة G وكانت $H\subseteq G$ يقال عن المجوعة H بأنها مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية $*$ إذا وفقط إذا كانت $a*b\in H$ لكل $a,b\in H$. إذا كانت $*$ عمليه ثنائيه على المجموعة G فان G تكون مغلقه بالنسبة للعملية الثنائية $*$. وليكن $a,b\in G$.

مثال (2.1)

(1) أن كل من عمليتي الجمع والضرب الاعتياديتين تشكل عمليه ثنائيه على مجموعة الأعداد ألطبيعيه $\mathbb{N}$ ، أما عملية الطرح الاعتيادي لا تشكل عملية ثنائيه على $\mathbb{N}$.

(2) لتكن X مجموعه غير خاليه ولتكن $P(X)$ تمثل القوى إلى X ، أي أن $P(X)=\{A:A\subseteq X\}$ فان كل من التقاطع $\cap$ والاتحاد $\cup$ تشكل عمليه ثنائيه على $P(X)$.

تعريف (3.1)

لتكن $*$ عمليه ثنائية على المجموعة G. وليكن $a,b\in G$. يقال عن العنصرين a,b بأنهما قابلان للمبادلة أو التبديل (Commute) إذا كان $a*b=b*a$.ويقال عن العملية الثنائية $*$ بأنها تبديليه (Commutative) إذا كانت جميع عناصر المجموعة G قابله للمبادلة مثنى مثنى. بعبارة أخرى العملية الثنائية $*$ تكون تبديليه (أبداليه أو تبادلية) على G إذا كان $a*b=b*a$ لكل $a,b\in G$. ويقال عن $*$ بأنها تجميعية (Associative) على G إذا كان $a*(b*c)=(a*b)*c$ لكل $a,b,c\in G$.

مثال (4.1)

(1) كل من عمليتي الجمع والضرب الاعتياديتين على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تكون تبديليه وتجميعية بينما كل من عمليتي الطرح والقسمة ليست تبديليه وليست تجميعية

(2) لتكن $*$ عمليه ثنائيه معرفه على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالشكل $a*b=a^2+b^2$ لكل $a,b\in\mathbb{R}$ فان

(أ) $*$ عمليه تبديليه على $\mathbb{R}$ لان $a*b=a^2+b^2=b^2+a^2=b*a$ لكل $a,b\in\mathbb{R}$

(ب) $*$ عمليه ليست تجميعية على $\mathbb{R}$ لان $a*(b*c)=a*(b^2+c^2)=a^2+(b^2+c^2)^2$ ،

$$(a*b)*c=(a^2+b^2)*c=(a^2+b^2)^2+c^2 \quad \Leftarrow \quad a*(b*c)\neq(a*b)*c$$

(3) لتكن $*$ عمليه ثنائيه معرفه على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالشكل $a*b=a+b^2$ لكل $a,b\in\mathbb{R}$ فان

(أ) $*$ عمليه ليست تبديليه على $\mathbb{R}$ لان $a*b=a+b^2\neq b+a^2=b*a$ لكل $a,b\in\mathbb{R}$

(ب) $*$ عمليه ليست تجميعية على $\mathbb{R}$ لان $a*(b*c)=a*(b+c^2)=a+(b+c^2)^2$ ،

$$(a*b)*c=(a+b^2)*c=(a+b^2)+c^2 \quad \Leftarrow \quad a*(b*c)\neq(a*b)*c$$

(4) لتكن G مجموعة تحتوي على أكثر من عنصر. نعرف $*$ على G بالصيغة $a*b=a$ لكل $a,b\in G$ ، فان

(أ) $*$ عمليه ليست تبديليه على G لان $a*b=a\neq b=b*a$ لكل $a,b\in G$

(ب) $*$ عمليه تجميعية على G لان $(a*b)*c=a*b=a,\quad a*(b*c)=a*,$

$$\Leftarrow \quad a*(b*c)=(a*b)*c$$

(5) لتكن G تمثل مجموعة المصفوفات من الدرجة 2×2 والتي مداخلها أعداد حقيقية ولتكن $*$ عملية الضرب الاعتيادية للمصفوفات فان $*$ عملية تجميعية وليست ابدالية.

تعريف(5.1)

لتكن كل من $*$ ، $\#$ عمليه ثنائية على المجموعة G. يقال عن العملية $\#$ بأنها توزيعية على $*$ **إذا كان**

(1) $a\#(b*c)=(a\#b)*(a\#c)$ التوزيع من اليسار

(2) $(b*c)\#a=(b\#a)*(c\#a)$ التوزيع من اليمين **لكل** $a,b,c\in G$.

مثال(6.1)

(1) ان عملية الضرب على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تتوزع على عملية الجمع **على مجموعة الأعداد** الحقيقية بينما عملية الجمع لا تتوزع على الضرب.

(2) **لتكن** X مجموعه غير خاليه ولتكن $P(X)$ **تمثل القوى إلى** X **، فان** عملية **التقاطع** $\cap$ تتوزع على عملية **لاتحاد وكذلك** عملية الاتحاد تتوزع على عملية التقاطع.

(3) تأمل العمليتين $*$ ، $\#$ المعرفتين على مجموعة الأعداد الصحيحة $a\#b=2ab$ ، $a*b=a+2b$ ، **فان** $\#$ **تتوزع على** $*$ **لان**

$$a\#(b*c)=2a(b*c)=2a(b+2c)=2ab+4ac=(a\#b)+2(a\#c)=(a\#b)*(a\#c)$$

ملاحظة

عندما يكون عدد عناصر المجموعة G صغير نسبيا يمكن تمثل نتائج تطبيق العملية الثنائية $*$ **على** G على شكل جدول ويسمى جدول الضرب . وننشئ هذا الجدول بأ**دراج عناصر** G على الترتيب نفسه أفقيا وعموديا ، فان ناتج $a*b$ يظهر في الجدول عند تقاطع السطر الذي يرأسه a والعمود الذي يرأسه b وبالعكس ويمكن من خلال الجدول تعرفه فيما إذا كانت العملية أبداليه أم لا . **فإذا كانت عناصر الجدول التي** تكون على شكل مصفوفة مربعه درجتها تساوي عدد عناصر ألمجموعه متناظرة حول القطر الرئيسي فأنها تكون أبداليه وبالعكس .

مثال(7.1)

لتكن $S=\{1,2,3\}$ ونعرف العملية $*$ **على** S **بواسطة الجدول التالي**

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

فنلاحظ من خلال الجدول أن مصفوفة عناصر العملية $*$ ليست متناظرة حول القطر الرئيسي وبالتالي تكون العملية $*$ غير أبداليه

تعريف(8.1)

يعرف النظام الرياضي (Mathematical System) بأنه مجموعة غير خالية مع عملية ثنائية أو أكثر **معرفة على تلك المجموعة**.النظام الرياضي المتكون من مجموعة غير الخالية G والعملية الثنائية الوحيدة $*$ **على** G سوف نرمز له بالزوج المرتب $(G,*)$ وبالمثل النظام الرياضي المتكون من المجموعة G والعمليتين $\#,*$ سوف يمثل بالثلاثي $(G,*,\#)$.يقال عن النظام الرياضي $(G,*)$ بأنه إبدا**لي إذا كان** $a*b=b*a$ **لكل** $a,b\in G$. ويقال بأنه تجميعي إذا كان $a*(b*c)=(a*b)*c$ **لكل** $a,b,c\in G$.

مثال(9.1)

(1) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مع عملية الجمع الاعتيادي، $(\mathbb{R},+)$ **تمثل** نظاما ذا عمليه واحدة

(2) **لتكن** X مجموعه غير خاليه ولتكن $P(X)$ **تمثل القوى إلى** X ، **فان** $(P(X),\cup,\cap)$ **تمثل نظام** رياضي ذا عمليتين

(3) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مع عملية الطرح $(\mathbb{N},-)$ لا تمثل نظاما رياضيا لان عملية(-)لا تمثل عمليه ثنائيه على $\mathbb{N}$

(4) الأنظمة الرياضية $(\mathbb{N},+), (\mathbb{Z},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{R},+), (\mathbb{N},\cdot), (\mathbb{Z},\cdot), (\mathbb{Q},\cdot), (\mathbb{R},\cdot)$ هي انظمه أبداليه حيث $+$ عملية الجمع الاعتيادي و. عملية الضرب الاعتيادي.

(5) الأنظمة الرياضية $(\mathbb{Z},-), (\mathbb{Q},-), (\mathbb{R},-), (\mathbb{Q}|\{0\},\div), (\mathbb{R}|\{0\},\div)$ ليست انظمه ليست أبداليه حيث- عملية الطرح الاعتيادي و $\div$ عملية القسمة الاعتيادية.

(6) **إذا كانت** X مجموعه غير خاليه ولتكن $P(X)$ **تمثل مجموعة القوى إلى** X ، فان الأنظمة الرياضية $(P(X),\cup)$ ، $(P(X),\cap)$ ، $(P(X),\Delta)$ تكون تجميعية وتبديليه .

(7) الأنظمة الرياضية $(\mathbb{Z},-), (\mathbb{Q},-), (\mathbb{R},-), (\mathbb{Q}|\{0\},\div), (\mathbb{R}|\{0\},\div)$ ليست تجميعية

(8) **المجموعة** $G=\{-1,1,-i,i\}$ مع عملية الضرب الاعتيادية تكون نظاما رياضيا حيث $i^2=-1$

(9) **لتكن** $*$ عمليه ثنائيه معرفه على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ **بالشكل** $a*b=\max\{a,b\}$ **لكل** $a,b\in\mathbb{R}$ **فان** $(\mathbb{R},*)$ يكون نظاما رياضيا تجميعيا وتبديليا.

تعريف(10.1)

ليكن $(G,*)$ نظاماً رياضيا .يقال عن

(1)النظام الرياضي$(G,*)$ بأنه شبه زمرة (Semi Group) **إذا كان** $(G,*)$ نظاما تجميعا **أي إن** $*$ عملية تجميعية على G.

(2) **العنصر** $e\in G$ بأنه عنصراً محايداً (Identity element) **إذا كان** $a*e=e*a=a$ **لكل** $a\in G$.
وإذا وجد مثل هذا العنصر يقال بان النظام الرياضي له عنصر محايد

(3) نظاماً أحاديا أو مونائيداً (Monoid) إذا كان شبه زمرة ذات عنصر محايد ، بعبارة أخرى إذا كان النظام الرياضي تجميعياً يحتوي على عنصر محايد.

ملاحظة

يقال إن e عنصرا محايدا أيمن بالنسبة للعملية الثنائية $*$ **إذا كان** $a*e=a$ **لكل** $a\in G$ ويسمى عنصرا محايدا أيسر إذا كان $e*a=a$ **لكل** $a\in G$ ويكون عنصراً محايداً إذا كان محايد أيمن وأيسر في نفس الوقت.

مثال(11.1)

(1) **الصفر** عنصر محايد بالنسبة لعملة الجمع الاعتيادية على $\mathbb{Z}$ **لان** $a+0=0+a$ **لكل** $a\in\mathbb{Z}$

(2) **إذا كانت** X مجموعه غير خاليه ولتكن $P(X)$ **تمثل القوى إلى** X ، **فان** $\varnothing$ تكون العنصر المحايد **للنظام** الرياضي $(P(X),\cup)$ **لان** $A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$ **وكذلك** X تكون العنصر المحايد للنظام الرياضي $(P(X),\cap)$ **لان** $A\cap X=X\cap A=A$. **وكذلك كل من** $(P(X),\cup)$ ، $(P(X),\cap)$ يمثل مونائيدا.

(3) النظام الرياضي $(\mathbb{Z}^+,\cdot)$ شبه زمره تمتلك عنصرا محايدا هو العدد الصحيح الموجب 1 **في** حين شبه **الزمرة** $(\mathbb{Z}^+,+)$ ليس لها عنصرا محايد لان $0\notin\mathbb{Z}^+$

(4) النظام الرياضي $(\mathbb{Z},+)$ يمثل مونائيد ولكن $(\mathbb{Z}^+,+)$ **لا** يمثل مونائيد لأنه ليس له عنصر محايد

(5) **لتكن** $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية . **تعرف** $*$ **على** $\mathbb{N}$ بالصيغة $a*b=a^b$ **لكل** $a,b\in\mathbb{N}$ **و** $b\neq 0$.
نلاحظ أن النظام الرياضي $(\mathbb{N},*)$ له عنصر محايد أيمن وهو $e=1$ **لان** $a*1=a^1=a$ **لكل** $a\in\mathbb{N}$
ولكن هذا النظام ليس له عنصر محايد أيسر لأنه لو فرضنا وجود عنصر محايد أيسر e' **فكان** $e'*a=a$ **لكل** $a\in\mathbb{N}$ **ولكن** $e'*a=(e')^a \Leftarrow a=(e')^a$ **لكل** $a\in\mathbb{N}$
بما أن $0\in\mathbb{N}$ **فان** $0=(e')^0$ **ولكن** $(e')^0=1$ وهذا يعني $0=1$ وهذا غير ممكن

(6) **لتكن** $*$ عمليه ثنائيه معرفه على مجموعة الأعداد **الطبيعية** $\mathbb{N}$ **بالشكل** $a*b=a^2+b^2$ **لكل** $a,b\in\mathbb{N}$ **فان** النظام الرياضي $(\mathbb{N},*)$ليس له عنصر محايد . **لان لو فرضنا** e عنصر محايد ، فان $a*e=a$ **لكل** $a\in\mathbb{N}$
بما ان $a*e=a^2+e^2 \Leftarrow a=a^2+e^2 \Leftarrow e^2=a-a^2$ **لكل** $a\in\mathbb{N}$ وهذا غير ممكن لان e^2 يجب ان يكون ثابت بينما $a-a^2$ متغير حسب تغيير a.

ملاحظه

من الأمثلة السابقة يتبن أن النظام الرياضي قد يكون له عنصر محايد أو لا يكون .والمبرهنة التالية تبين في حالة وجود عنصر محايد للنظام يجب أن يكون وحيد

مبرهنة (12.1)

النظام الرياضي $(G,*)$ يحتوي على الأكثر عنصر محايد واحد

البرهان:

نفرض كلا من e_1,e_2 عنصر محايد للنظام $(G,*)$

بما أن e_1 عنصر محايد ، $e_2\in G$ **فان** $e_2*e_1=e_2$ **وكذلك بما أن** e_2 عنصر محايد ، $e_1\in G$

فان $e_1*e_2=e_1$ وعلية نحصل على $e_1=e_2$ أي انه يوجد عنصر محايد واحد فقط (وحيد)

تعريف (13.1)

ليكن $(G,*)$ نظاما رياضيا ذات عنصر محايد e وليكن $a\in G$. يقال عن العنصر a بان له **معكوس أو** نظير (Inverse) بالنسبة للعملية $*$ **إذا وجد** $b\in G$ بحيث إن $a*b=b*a=e$ ويسمى العنصر b معكوس أو نظير العنصر a ويرمز له بالرمز a^{-1}.

ملاحظة

يقال أن العنصر a^{-1} معكوس أيمن للعنصر a بالنسبة للعملية الثنائية $*$ **إذا كان** $a*a^{-1}=e$ ويسمى معكوس أيسر إذا كان $a^{-1}*a=e$. **إذا كان** $(G,*)$ **نظاما** رياضيا ذات عنصر محايد e **فان** $e^{-1}=e$.

مثال (14.1)

في النظام الرياضي $(\mathbb{Z},+)$ **كل عنصر** $a\in\mathbb{Z}$ له معكوس هو $-a$ **لان** $a+(-a)=(-a)+a=0$ **في** حين النظام الرياضي $(\mathbb{N},+)$ **فقط العنصر** $0\in\mathbb{N}$ له معكوس

مبرهنة (15.1)

إذا كانت $(G,*)$ شبه زمرة ذات عنصر محايد (مونائيد) **فان كل عنصر في** G له معكوس واحد على الأكثر.

البرهان :

نفرض e هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $*$ وليكن كل من b_1,b_2 نظيرا للعنصر a

$$b_1=b_2 \Leftarrow b_1*e=b_2 \Leftarrow b_1*(a*b_2)=b_2 \Leftarrow (b_1*a)*b_2=e*b_2 \Leftarrow b_1*a=e \Leftarrow$$

تمارين(1)

1.1 لتكن X مجموعه غير خاليه ولتكن T مجموعة كل الدوال $f : X \to \mathbb{R}$. تعرف $*$ على المجموعة T بالصيغة $f * g = f + g$ لكل $f, g \in T$ فان $*$ تكون عمليه ثنائيه على T

2.1 عين أيا من العمليات الثنائية التالية على مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ هي تجميعية وأيا منها تبديليه.

(أ) $a * b = 0$ لكل $a,b \in \mathbb{Q}$ (ب) $a * b = \frac{1}{3}(a+b)$ لكل $a,b \in \mathbb{Q}$

(ج) $a * b = a$ لكل $a,b \in \mathbb{Q}$ (د) $a * b = a + b + 2$ لكل $a,b \in \mathbb{Q}$

3.1 ليكن $(G,*)$ نظاما رياضيا ذا عنصر محايد ولتكن المعادلة التالية متحققة $(a*b)*(c*d) = (a*c)*(b*d)$ لكل $a,b,c,d \in G$ فان العملية $*$ تجميعية وتبادليه

4.1 لتكن العملية $*$ معرفه على مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ بالصيغة $a * b = a + b - ab$ لكل $a,b \in \mathbb{Q}$. جد العنصر المحايد وهل لكل عنصر في $\mathbb{Q}$ معكوس ؟

5.1 تأمل مجموعة العناصر الثلاثة $S = \{x, y, z\}$ والعملية $*$ معطلة بجدول الضرب أدناه

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

فان النظام الرياضي $(S,*)$ تبديل ذا عنصر محايد

6.1 لتكن $G = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}^*\}$. نعرف العملية الثنائية $*$ على T بالصيغة $(a,b)*(c,d) = (ac,bd)$ فان النظام الرياضي $(G,*)$ شبه زمره أبداليه ذا عنصر محايد

7.1 لتكن $S = \{1,2,3,4,6\}$ وعرفت العملية $*$ كما يلي : $a * b = g.c.d\{a,b\}$ حيث $g.c.d$ القاسم المشترك الأعظم ، فان النظام $(S,*)$ إبدالي

2. الزمر وخواصها The groups and Its properties

تعريف (1.2)
النظام الرياضي $(G,*)$ يسمى زمرة (Group) إذا تحققت البديهيات الآتية :

(1) $*$ عملية تجميعية على G، **أي إن** $a*(b*c)=(a*b)*c$ **لكل** $a,b,c\in G$

(2) G تحتوي على عنصر محايد بالنسبة للعملية $*$، أي أن يوجد $e\in G$ بحيث أن $a*e=e*a=a$ **لكل** $a\in G$.

(3) **لكل** $a\in G$ له معكوس(نظير) $a^{-1}\in G$ بالنسبة للعملية $*$، **أي أن لكل** $a\in G$ يوجد $a^{-1}\in G$ بحيث أن $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

العنصر المحايد وحيد وكل عنصر له معكوس واحد فقط

ويقال **عن الزمرة** $(G,*)$ **بأنها**

(1) تبادلية (أبدالية) إذا كانت العملية الثنائية $*$ تبادلية على G، **أي أن** $a*b=b*a$ **لكل** $a,b\in G$

(2) منتهية إذا كانت G مجموعة منتهية وفيما عدا ذلك يقال أن الزمرة $(G,*)$ غير منتهية. **إذا كانت** $(G,*)$ **زمرة** منتهية ، يسمى عدد عناصر G **برتبة** (Order) **الزمرة** $(G,*)$ ويرمز له بالرمز $0(G)$ **أو** $|G|$ ، **أما إذا كانت** $(G,*)$ زمرة غير منتهية فيقال أنها زمرة ذات رتبة غير منتهية .

مثال (2.2)

(1) كل من الأنظمة الرياضية $(\mathbb{Z},+),\ (\mathbb{Q},+),\ (\mathbb{R},+),\ (\mathbb{C},+)$ تكون زمرة ابدالية غير منتهية ، بينما النظام الرياضي $(\mathbb{N},+)$ لا يمثل زمرة لعدم وجود النظير.

(2) كل من الأنظمة الرياضية $(\mathbb{Q}^*,\cdot),\ (\mathbb{R}^*,\cdot),\ (\mathbb{C}^*,\cdot)$ تكون زمرة ابدالية غير منتهية ، بينما النظام الرياضي $(\mathbb{Z},\cdot)$ لا يمثل زمرة لعدم وجود النظير.

(3) مجموعة الأعداد الزوجية $\mathbb{Z}_e$ مع عملية الجمع الاعتيادية تكون زمرة غير منتهية بينما مجموعة الأعداد الفردية $\mathbb{Z}_0$ مع عملية الجمع الاعتيادية لا تكون زمرة .

(4) **المجموعة** $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} : ad-bc\neq 0,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ مع عملية ضرب المصفوفات تكون زمرة غير منتهية ولكنها غير ابدالية. (**العنصر** المحايد $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **وان** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$)

(5) ليكن $a\in\mathbb{R}^*$. **المجموعة** $G=\{na : n\in\mathbb{Z}\}$ مع عملية الجمع الاعتيادية تكون زمرة ابدالية غير منتهية.

(6) **لتكن** X مجموعه غير خاليه ولتكن $P(X)$ **تمثل القوى إلى** X

(أ) النظام الرياضي $(P(X),\cup)$ ليس زمرة لعدم وجود النظير، **أي إذا كانت** $A\in P(X)$ ، $A\neq ¤$ فانه لا يوجد $B\in P(X)$ **بحث ان** $A\cup B=¤$

(ب) النظام الرياضي $(P(X),\cap)$ ليس زمرة لعدم وجود النظير، **أي إذا كانت** $A\in P(X)$ ، $A\neq X$ فانه لا يوجد $B\in P(X)$ **بحث ان** $A\cap B=X$

(ج) النظام الرياضي $(P(X),\Delta)$ يكون **زمرة** ($e=¤$ ، $A^{-1}=A$)

(7) **المجموعة** $G=\{(a,b) : a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0\}$ مع العملية الثنائية $*$ المعرفة بالصيغة $(a,b)*(c,d)=(ac,bc+d)$ تكون زمرة غير منتهية ولكنها ليست ابدالية.(العنصر المحايد هو $e=(1,0)$ ، **وان** $(a,b)^{-1}=(\frac{1}{a},\frac{b}{a})$) $\Leftarrow$ $(1,2)*(3,4)=(3,10),\quad (3,4)*(1,2)=(3,6)$ $\Leftarrow$ $(1,2)*(3,4)\neq(3,4)*(1,2)$

(8) **المجموعة** $G=\{-1,1\}$ مع عملية الضرب الاعتيادية تكون زمرة منتهية حيث **وان** $0(G)=2$

(9) **المجموعة** $G=\{-1,1,-i,i\}$ مع عملية الضرب الاعتيادية تكون زمرة منتهية حيث $i^2=-1$ **وان** $0(G)=4$

(10) **لتكن** $G=\{e,a,b,c\}$ ولتكن العملية الثنائية $*$ **معرفة في جدول الضرب**

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

فان $(G,*)$ زمرة أبدالية منتهية وان $0(G)=4$ وتسمى زمرة كلاين الرباعية .

مبرهنة (3.2) (قانون الحذف أو الاختصار)

لتكن $(G,*)$ **زمرة** وليكن $a,b,c\in G$

(1) **إذا كانت** $a*c=b*c$ **فان** $a=b$ (2) **إذا كانت** $c*a=c*b$ **فان** $a=b$

البرهان :

بما ان $(G,*)$ **زمرة وان** $c\in G \Leftarrow c^{-1}\in G$

(1) **بما ان** $a*c=b*c$

$\Leftarrow (a*c)*c^{-1}=(b*c)*c^{-1} \Leftarrow a*(c*c^{-1})=b*(c*c^{-1}) \Leftarrow a*e=b*e \Leftarrow a=b$

وبالمثل نبرهن (2)

مبرهنة (4.2)

لتكن $(G,*)$ **زمرة فان**

(1) $(a^{-1})^{-1}=a$ **لكل** $a\in G$ (2) $(a\times b)^{-1}=b^{-1}\times a^{-1}$ **لكل** $a,b\in G$

البرهان :

(1) ليكن $a\in G$

ان العنصر $(a^{-1})^{-1}$ هو نظير العنصر a^{-1} وعليه $a^{-1}*(a^{-1})^{-1}=e$ **وكذلك** $a^{-1}*a=e$

$\Leftarrow a^{-1}*(a^{-1})^{-1}=a^{-1}*a$ **وباستخدام قانون الحذف نحصل على** $(a^{-1})^{-1}=a$

(2) ليكن $a,b\in G$

$$(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=a*(b*(b^{-1}*a^{-1}))=a*((b*b^{-1})*a^{-1})=a*(e*a^{-1})=a*a^{-1}=e$$

وكذلك $(b^{-1}*a^{-1})*(a*b)=b^{-1}*(a^{-1}*(a*b))=b^{-1}*((a^{-1}*a)*b)=b^{-1}*(e*b)=b^{-1}*b=e$

وعليه $b^{-1}\times a^{-1}$ هو نظير العنصر $a*b$ **ولكن** $(a*b)^{-1}$ نظير $a*b$

بما ان النظير وحيد فان $(a\times b)^{-1}=b^{-1}\times a^{-1}$.

مبرهنة (5.2)

لتكن $(G,*)$ **زمرة فان**

(1) **الزمرة** $(G,*)$ تكون ابدالية **إذا وفقط إذا كان** $(a*b)^{-1}=a^{-1}*b^{-1}$ **لكل** $a,b\in G$

(2) **إذا كانت** $a^{-1}=a$ **لكل** $a\in G$ **فان الزمرة** $(G,*)$ تكون أبدالية .

البرهان :

(1) **نفرض الزمرة** $(G,*)$ ابدالية $\Leftarrow (a*b)^{-1}=(b*a)^{-1}=a^{-1}*b^{-1}$

الاتجاه الأخر : نفرض $(a*b)^{-1}=a^{-1}*b^{-1}$ **لكل** $a,b\in G$

ليكن $a,b\in G$ ، **بما ان** $(a\times b)^{-1}=b^{-1}\times a^{-1}$ (حسب مبرهنة 4.2)

$\Leftarrow a^{-1}*b^{-1}=b^{-1}*a^{-1} \Leftarrow a*(a^{-1}*b^{-1})*a=a*(b^{-1}*a^{-1})*a \Leftarrow (a*a^{-1})*(b^{-1}*a)=(a*b^{-1})*(a^{-1}*a)$

$\Leftarrow e*(b^{-1}*a)=(a*b^{-1})*e \Leftarrow b^{-1}*a=a*b^{-1} \Leftarrow b*(b^{-1}*a)*b=b*(a*b^{-1})*b$

$\Leftarrow (b*b^{-1})*(a*b)=(b*a)*(b^{-1}*b) \Leftarrow e*(a*b)=(b*a)*e \Leftarrow a*b=b*a$

$\Leftarrow (G,*)$ ابدالية

(2) ليكن $a,b \in G \quad \Leftarrow \quad (a*b)^{-1} = a*b$

بما ان $a^{-1} = a$ ، $b^{-1} = b \quad \Leftarrow \quad (a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$ ، **وباستخدام** (1)، **نحصل على** $(G,*)$ ابدالية .

مبرهنة (6.2)

النظام الرياضي $(G,*)$ يكون زمرة **إذا وفقط إذا كان**

(1) $*$ عملية تجميعية (2) **المعادلتان** $a*x=b$ **و** $y*a=b$ لهما حلان وحيدان في G.

البرهان :

نفرض $(G,*)$ **زمرة** $\Leftarrow$ $*$ عملية تجميعية من تعريف الزمرة

بقي ان نبرهن الشرط الثاني : **بما ان** $a \in G \quad \Leftarrow \quad a^{-1} \in G \quad \Leftarrow \quad x = a^{-1}*b \in G$ **وكذلك**

$x = a^{-1}*b \quad \Leftarrow \quad a*x = a*(a^{-1}*b) = (a*a^{-1})*b = e*b = b$ يحقق المعادلة $a*x=b$ ، وهذا

يعني ان $a^{-1}*b$ **حلا للمعادلة** $a*x=b$ وللبرهنة على انه حلا وحيد ، نفرض يوجد حل أخر مثل z **للمعادلة** $a*x=b$

$\Leftarrow \quad a*z=b \quad \Leftarrow \quad a*z = e*b = (a*a^{-1})*b = a*(a^{-1}*b) \quad \Leftarrow \quad z = a^{-1}*b = x$

وبالمثل نبرهن على ان للمعادلة $y*a=b$ حلا وحيدا.

الاتجاه الأخر : **نفرض** الشرطين (1)،(2) ونبرهن $(G,*)$ **زمرة**

$\Leftarrow$ $*$ عملية تجميعية (**حسب الشرط** (1))

نضع $b=a$ ، **من المعادلتان** ، **نحصل على** $a*x=a$ ، $y*a=a$ لهما حل واحد هو $x=y=e$ ، وعليه G تحتوي على عنصر محايد e

ليكن $a \in G$. **نضع** $b=e$ ، **باستخدام الشرط** (2) **نحصل على المعادلتان** $a*x=e$ ، $y*a=e$ لهما حل واحد هو $x=y=a^{-1}$ ، وعليه **لكل** $a \in G$ له نظير $a^{-1} \in G$ **فان** $(G,*)$ **زمرة**.

مبرهنة (7.2)

في جدول الضرب لزمرة . كل عنصر يظهر بالضبط مرة واحدة فقط في كل **صف وكل عمود**

البرهان :

سنبرهن بطريقة **التناقض، نفرض ان العنصر** b يظهر مرتين في السطر الذي يرأسه العنصر a، وعليه يوجد عنصران مختلفان x_1,x_2 بحيث ان $a*x_1=b,\ a*x_2=b$ وهذا يناقض مع وجود حل واحد فقط **للمعادلة** $a*x=b$ وعليه كل عنصر يظهر مرة واحدة فقط في كل صف. وبنفس الطريقة نبرهن ان كل عنصر يظهر مرة واحدة فقط في كل عمود.

مبرهنة(8.2)

إذا كان a,b عنصرين غير متبادلين من الزمرة $(G,*)$ **أي أن** $a*b \neq b*a$ **فان عناصر المجموعة** $\{e,a,b,a*b,b*a\}$ جميعها مختلفة فيما بينها

البرهان :

الفكرة الأساسية للبرهان هي اختيار عناصر المجموعة $\{e,a,b,a*b,b*a\}$ اثنين في كل مرة ونبين ان كلا المتساويات العشرة الممكنة تؤدي إلى نقض الفرضية $a*b \neq b*a$

(1) **إذا كان** $e=a$ **فان** $a*b = e*b = b = b*e = b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b \neq b*a$ وعليه $e \neq a$

(2) **إذا كان** $e=b$ **فان** $a*b = a*e = a = e*a = b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b \neq b*a$ وعليه $e \neq b$

(3) **إذا كان** $e=a*b$ **فان** $a*e = e*a = (a*b)*a = a*(b*a) \quad \Leftarrow \quad e = b*a \quad \Leftarrow \quad a*b = b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b \neq b*a$ وعليه $e \neq a*b$

(4) **إذا كان** $e=b*a$ **فان** $e*a = a*e = a*(b*a) = (a*b)*a \quad \Leftarrow \quad e = a*b \quad \Leftarrow \quad a*b = b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b \neq b*a$ وعليه $e \neq b*a$

(5) **إذا كان** $a=b$ **فان** $a*b = b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b \neq b*a$ وعليه $a \neq b$

(6) **إذا كان** $a=a*b$ **فان** $e=b \Leftarrow a*b=b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b\neq b*a$ وعليه $a\neq a*b$
(7) **إذا كان** $a=b*a$ **فان** $e=b \Leftarrow a*b=b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b\neq b*a$ وعليه $a\neq b*a$
(8) **إذا كان** $b=a*b$ **فان** $e=a \Leftarrow a*b=b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b\neq b*a$ وعليه $b\neq a*b$
(9) **إذا كان** $b=b*a$ **فان** $e=a \Leftarrow a*b=b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b\neq b*a$ وعليه $b\neq b*a$
(10) **إذا كان** $a*b=b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b\neq b*a$

مبرهنة (9.2)

كل زمرة غير أبدالية لها على الأقل **ستة عناصر**

البرهان :

لتكن $(G,*)$ زمرة غير تبديلية $\Leftarrow$ يوجد $a,b\in G$ بحيث ان $a*b\neq b*a$، باستخدام المبرهنة (8.2) **ان عناصر المجموعة** $\{e,a,b,a*b,b*a\}$ جميعها مختلفة فيما بينها . والان نستمر لإثبات احد العنصرين $a*a$ **أو** $a*b*a$ من عناصر الزمرة يختلف عن الخمسة عناصر هذه.

(1) **إذا كان** $a*a=a$ **فان** $a=e \Leftarrow a*b=e*b=b=b*e=b*a$ وهذا يناقض $a*b\neq b*a$ **وعليه** $a*a\neq a$

(2) **إذا كان** $a*a=b$ **فان** $a*b=a*(a*a)=(a*a)*a=b*a$ وهذا يناقض $a*b\neq b*a$ وعليه $a*a\neq b$

(3) **إذا كان** $a*a=a*b$ **فان** $a=b \Leftarrow a*b=b*a$ وهذا يناقض $a*b\neq b*a$ وعليه $a*a\neq a*b$

(4) **إذا كان** $a*a=b*a$ **فان** $a=b \Leftarrow a*b=b*a$ وهذا يناقض $a*b\neq b*a$ وعليه $a*a\neq b*a$

إذا كان $a*a\neq e$ **فان** $a*a$ هو العنصر السادس، أما إذا كان $a*a=e$ نستطيع ان نبرهن $a*b*a$ يختلف **عن كل من** $e,a,b,a*b,b*a$ وبالتالي يكون $a*b*a$ هو العنصر السادس والسبب يعتمد على حقيقة

$$a*(a*b*a)=(a*a)*(b*a)=e*(b*a)=b*a$$

(5) **إذا كان** $a*b*a=e$ **فان** $b*a=a*(a*b*a)=a*e=a \Leftarrow e=b \Leftarrow a*b=b*a$ وهذا يناقض $a*b\neq b*a$ وعليه $a*b*a\neq e$

(6) **إذا كان** $a*b*a=a$ **فان** $a*b=e \Leftarrow a*b*a=b \Leftarrow a*b=a*(a*b*a)=b*a$ وهذا يناقض $a*b\neq b*a$ وعليه $a*b*a\neq a$

(7) **إذا كان** $a*b*a=b$ **فان** $a*b=a*(a*b*a)=b*a$ وهذا يناقض الفرضية $a*b\neq b*a$ وعليه $a*b*a\neq b$

(8) **إذا كان** $a*b*a=a*b$ **فان** $a=e \Leftarrow a*b=e*b=b=b*e=b*a$ وهذا يناقض $a*b\neq b*a$ وعليه $a*b*a\neq a*b$

(9) **إذا كان** $a*b*a=b*a$ **فان** $a=e \Leftarrow a*b=e*b=b=b*e=b*a$ وهذا يناقض $a*b\neq b*a$ وعليه $a*b*a\neq b*a$

ملاحظة

إن المعاكس الايجابي للمبرهنة أعلاه هو (كل زمرة عدد عناصرها اقل أو يساوي خمسة تكون أبدالية)

تعريف(10.2)

لتكن $(G,*)$ وليكن $a\in G$. **تعرف** a^n حيث n عدد صحيح موجب ، بأنه العنصر

$$a^n=a*a*a*\cdots*a \quad (\text{من المرات } n)$$

ويمكننا تعميم هذا التعريف ليشمل الأعداد الصحيحة والصفر وذلك باعتبار $a^0=e,\quad a^{-n}=(a^{-1})^n$ حيث $n\in\mathbb{Z}^+$.

مثال(11.2)

في الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ **إذا كان** $a\in\mathbb{Z}$ ، **فان** $a^n=a+a+\cdots+a=na$ ، **وبصورة خاصة**

$$3^2=3+3=6,\quad 5^0=0,\quad 4^{-2}=(4^{-1})^2=(-4)^2=(-4)+(-4)=-8$$

مبرهنة (12.2)

لتكن $(G,*)$ **زمرة ولتكن** $a\in G$ ، $n,m\in\mathbb{Z}$ **فان**

(1) $a^n * a^m = a^{n+m}$ (2) $(a^n)^m = a^{nm}$ (3) $a^{-n} = (a^n)-1$ (4)__ $e^n = e$

البرهان: مباشرة من التعريف

مبرهنة (13.2)

لتكن $(G,*)$ زمرة فان

(1) **الزمرة** $(G,*)$ تكون ابدالية **إذا وفقط إذا كان** $(a*b)^2 = a^2 * b^2$ **لكل** $a,b \in G$

(2) **إذا كانت** $a^2 = e$ **لكل** $a \in G$ **فان الزمرة** $(G,*)$ تكون أبدالية .

البرهان :

(1) **نفرض الزمرة** $(G,*)$ ابدالية

ليكن $a,b \in G \Rightarrow a*b = b*a$

$$(a*b)^2 = (a*b)*(a*b) = a*(b*a)*b = a*(a*b)*b = (a*a)*(b*b) = a^2 * b^2$$

الاتجاه الأخر : نفرض $(a*b)^2 = a^2 * b^2$ **لكل** $a,b \in G$

ليكن $a,b \in G \Rightarrow (a*b)^2 = a^2 * b^2$

$\Rightarrow (a*b)*(a*b) = a^2*b^2 \Rightarrow a*(b*a)*b = a*(a*b)*b \Rightarrow b*a = a*b \Rightarrow (G,*)$
زمرة ابدالية

(2) ليكن $a,b \in G \Rightarrow a^2 = e,\ b^2 = e$

بما ان $a,b \in G \Rightarrow a*b \in G \Rightarrow (a*b)^2 = e$

$\Rightarrow (a*b)^2 = e = e*e = a^2*b^2 \Rightarrow (G,*)$ زمرة ابدالية

ملاحظة

معكوس الفرع (2) **من** المبرهنة أعلاه غير صحيح أي انه إذا كانت $(G,*)$ **زمرة أبدالية** فليس من الضروري أن **تكون** $a^2 = e$ **لكل** $a \in G$.

تعريف (14.2)

ليكن $(G,*)$ نظاما رياضيا وليكن $a \in G$. يقال عن العنصر a بأنه متساوي القوى(Idempotent) **إذا كان** $a^2 = a$. **رتبة** (Order) **العنصر** a هي اصغر عدد صحيح موجب n بحيث أن $a^n = e$ (**على شرط** n **موجود**) .

ملاحظة

أية زمرة $(G,*)$ تمتلك بالضبط عنصر واحد متساوي القوى الذي هو محايد الزمرة . لان الحل الوحيد للمعادلة $a*a = a$ هو $a = e$.

مثال(15.2) زمرة **تناظرات المربع** The group of symmetries of a square

لنتصور بان لدينا قطعة من الكارتون مربعة الشكل موضوعة بحيث ان جوانبها موازية لمحوري نظام الإحداثيات ومركزها يقع على نقطة **الأصل** وان زواياها مرقمة كما في الشكل **الأتي** : **لتكن** G_S **مجموعة تحتوي** على عدد معين من التحويلات للقطعة المربعة وهذه التحويلات هي

- التحويل المحايد وسنرمز له **بالرمز** e وهو الذي يبقي كل نقطة من نقاط المربع ثابتة في محلها
- التحويلات الدورانية **باتجاه عقرب الساعة** r_3, r_2, r_1 حول المركز بزوايا قدرها $270^\circ, 180^\circ, 90^\circ$ **على التوالي**
- التحويلات الانعكاسية v, h حول المستقيمين **الأفقي** والعمودي المارين بالمركز على التوالي والتحويلات الانعكاسية d_1, d_2 حول القطرين .

ويمكننا ضرب (**أو** تركيب) أي تحويلين من التحويلات اعلاة بتطبيقها الواحدة بعد **الأخرى فمثلا إذا كان كل من** x ، y تحويلا فان التحويل $x*y$ هو ذلك التحويل الذي نحصل علية نتيجة **لإجراء** التحويل y **أولا ومن ثم** التحويل x.

فمثلا $h*r_1$ هو ذلك العنصر في G_S الناتج من اجراء التحويل r_1 **ومن ثم** نتبعه بالتحويل h، وعليه $h*r_1 = d_2$.

ونفس الطريقة يمكننا ان نبين $r_1 * h = d_1$ وعلية نستنتج بان $*$ عملية غير ابدالية على G_S .

وفي الحقيقة $(G_S,*)$ **تشكل زمرة تدعى بزمرة التناظر للمربع وجدول** هذه **الزمرة موضح كما في الشكل**

$*$	e	r_1	r_2	r_3	h	v	d_1	d_2
e	e	r_1	r_2	r_3	h	v	d_1	d_2
r_1	r_1	r_2	r_3	e	d_1	d_2	v	h
r_2	r_2	r_3	e	r_1	v	h	d_2	d_1
r_3	r_3	e	r_1	r_2	d_2	d_1	h	v
h	h	d_2	v	d_1	e	r_2	r_3	r_1
v	v	d_1	h	d_2	r_2	e	r	r_3
d_1	d_1	h	d_2	v	r_1	r_3	e	r_2
d_2	d_2	v	d_1	h	r_3	r_1	r_2	e

مثال (216.)

لتكن G_t مجموعة تحتوي على عدد من التحويلات لمثلث متساوي **الأضلاع** وهذه التحويلات هي :- التحويل المحايد e وهو الذي يبقي المثلث ثابتا في محله ، تدويران مع عقارب الساعة r_2, r_1 **حول مركز المثلث** بزاويتين مقدارهما $240^o, 120^o$ **على التوالي** ، ثلاث تحويلات انعكاسية ℓ_3, ℓ_2, ℓ_1 حول المستقيمات L_3, L_2, L_1 .

نقصد بالتحويل $x * y$ بأنه ذلك الذي نحصل علية نتيجة **لإجراء** التحويل y **أولا** ثم التحويل x .

فمثلا $r_1 * \ell_1$ هو ذلك العنصر في G_t الناتج من اجراء التحويل ℓ_1 **ومن ثم** نتبعه بالتحويل r_1

وبنفس الطريقة يمكننا ان نبين $\ell_1 * r_1 = \ell_3$ وعلية نستنتج بان العملية $*$ غير ابدالية

وفي الحقيقة ان $(G_t,*)$ **تشكل زمرة وتسمى بزمرة التناظرات لمثلث متساوي الأضلاع وجدول الزمرة** هذه **موضح كما في أدناه** :

$*$	e	r_1	r_2	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
e	e	r_1	r_2	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
r_1	r_1	r_2	e	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_1
r_2	r_2	e	r_1	ℓ_3	ℓ_1	ℓ_2
ℓ_1	ℓ_1	ℓ_3	ℓ_2	e	r_2	r_1
ℓ_2	ℓ_2	ℓ_1	ℓ_3	r_1	e	r_2
ℓ_3	ℓ_3	ℓ_2	ℓ_1	r_2	r_1	e

تمارين (2)

1.2 بين فيما إذا كانت $(G,*)$ زمرة لكل مما يأتي مع البرهان

(1) $G=\{a\in\mathbb{Z}:a\neq 1\}$ بحيث ان $a*b=a+b-ab$ لكل $a,b\in G$

(2) $G=\mathbb{Z}^{+}$ بحيث ان $a*b=\max\{a,b\}$ لكل $a,b\in G$

(3) $G=\mathbb{Z}$ بحيث ان $a*b=a+b+1$ لكل $a,b\in G$

(4) $G=\{a\in\mathbb{Q}:a\neq 1\}$ بحيث ان $a*b=a+b+ab$ لكل $a,b\in G$

(5) $G=\mathbb{Z}$ بحيث ان $a*b=a+(-1)^{a}b$ لكل $a,b\in G$

2.2 لتكن $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$ حيث $f_1(x)=x$ ، $f_2(x)=\frac{1}{x}$ ، $f_3(x)=1-x$ ، $f_4(x)=\frac{x-1}{x}$ ، $f_5(x)=\frac{x}{x-1}$ ، $f_6(x)=\frac{1}{1-x}$ لكل $x\in\mathbb{R}/\{0,1\}$. برهن على ان $(G,\circ)$ زمرة ولكنها ليست ابدالية إذا علمت ان $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ لكل $f,g\in G$.

3.2 لتكن $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ حيث $f_1(x)=x$ ، $f_2(x)=\frac{1}{x}$ ، $f_3(x)=-x$ ، $f_4(x)=-\frac{1}{x}$ ، لكل $x\in\mathbb{R}^{*}$.
برهن على ان $(G,\circ)$ زمرة ابدالية إذا علمت ان $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ لكل $f,g\in G$.

4.2 لتكن $G=\{a\in\mathbb{R}:-1<a<1\}$. برهن على ان $(G,*)$زمرة ابدالية إذا علمت ان $a*b=\frac{a+b}{1+ab}$ لكل $a,b\in G$

5.2 لتكن $G=\{a\in\mathbb{Q}:a\neq 1\}$. برهن على ان $(G,*)$زمرة ابدالية إذا علمت ان $a*b=a+b-ab$ لكل $a,b\in G$

6.2 لتكن $G=\mathbb{Q}^{+}$. برهن على ان $(G,*)$زمرة ابدالية إذا علمت ان $a*b=\frac{ab}{2}$ لكل $a,b\in G$

7.2 لتكن $G=\{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:a\neq 0,b\neq 0\}$. برهن على ان $(G,*)$زمرة ابدالية
إذا علمت ان $(a,b)*(c,d)=(ac,bd)$ لكل $(a,b),(c,d)\in G$

8.2 لتكن $G=\{a\in\mathbb{R}:a\neq 1\}$.برهن على ان $(G,*)$زمرة ابدالية إذا علمت ان $a*b=1+(a-1)(b-1)$ لكل $a,b\in G$

9.2 لتكن $G=\{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:a\neq 0\}$. برهن على ان $(G,*)$ زمرة إذا علمت ان $(a,b)*(c,d)=(2ac,2ad+b)$ لكل $(a,b),(c,d)\in G$

3. زمرة الأعداد الصحيحة معيار n Group of Integers Modulo n

تعريف (1.3)

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $a,b \in \mathbb{Z}$. يقال عن العددان a,b بأنهما متطابقان(Congruent) للمعيار n (أو يقال ان العدد a يطابق أو يوافق العدد b للمعيار n) **وتكتب** $a \equiv b(\bmod n)$ **إذا كان** $a-b$ يقبل القسمة على n .

يعني ان $a \equiv b(\bmod n)$ **إذا كان** $a-b=kn$ لعدد صحيح مثل k

إذا كانت $a-b$ **لا تقبل القسمة على** n **فنقول ان** a غير متطابقة مع b معيار n. وفي هذه الحالة تكتب $a \not\equiv b(\bmod n)$

مثال (2.3)

(1) $10 \equiv 4(\bmod 3)$ **لان** $10-4$ يقبل القسمة 3

(2) $-13 \equiv 3(\bmod 4)$ **لان** $-13-3$ يقبل القسمة 4

(3) $11 \equiv -4(\bmod 4)$ **لان** $11-(-4)$ **يقبل القسمة** 5

(4) $-17 \equiv -3(\bmod 7)$ **لان** $-17-(-3)$ يقبل القسمة 7

(5) $36 \not\equiv 4(\bmod 5)$ **لان** $36-4$ لا يقبل القسمة 5

(6) $-10 \not\equiv 4(\bmod 3)$ **لان** $-10-4$ لا يقبل القسمة 3

ملاحظة

المتطابقة $ax \equiv b(\bmod n)$ لها حلول إذا كان b يقسم $\text{g.c.d}(a,n)$ **أو** $\text{g.c.d}(a,n)$ يقسم b **وعدد الحلول** يساوي $\text{g.c.d}(a,n)$

مبرهنة(3.3)

ليكن n عددا صحيحا موجبا فان التطابق معيار n **علاقة تكافؤ على** $\mathbb{Z}$.

البرهان:

(1) ليكن $a \in \mathbb{Z}$

بما ان $a-a=0=0.n \Leftarrow a \equiv a(\bmod n)$

$\Leftarrow$ التطابق علاقة انعكاسية على $\mathbb{Z}$

(2) ليكن $a,b \in \mathbb{Z}$ ، وليكن $a \equiv b(\bmod n)$

$\Leftarrow a-b=kn$ **لبعض** $k \in \mathbb{Z} \Leftarrow -(a-b)=-kn \Leftarrow b-a=(-k)n$

$\Leftarrow b \equiv a(\bmod n) \Leftarrow$ **التطابق علاقة متناظرة على** $\mathbb{Z}$

(3) ليكن $a,b,c \in \mathbb{Z}$ ، وليكن $a \equiv b(\bmod n)$ ، $b \equiv c(\bmod n)$

$\Leftarrow a-b=kn$ ، $b-c=k_2n$ **لبعض** $k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$

$\Leftarrow a-c=(a-b)+(b-c)=k_1n+k_2n=(k_1+k_2)n$

$\Leftarrow a \equiv c(\bmod n) \Leftarrow$ التطابق علاقة متعدية على $\mathbb{Z}$

وعليه التطابق علاقة تطابق على $\mathbb{Z}$

مبرهنة (4.3)

ليكن n عددا صحيحا موجبا ثابتا ، $a,b,c \in \mathbb{Z}$ **فان**

(1) **إذا كانت** $a \equiv b(\bmod n)$ **و** $c \equiv d(\bmod n)$ **فان** $a+c \equiv (b+d)(\bmod n)$ **و** $ac \equiv bc(\bmod n)$.

(2) **إذا كانت** $a \equiv b(\bmod n)$ **فان** $ac \equiv bc(\bmod n)$

(3) **إذا كانت** $a \equiv b(\bmod n)$ **فان** $a^k \equiv b^k(\bmod n)$ **لكل** $k \in \mathbb{Z}^+$

البرهان :

(1) **بما إن** $a \equiv b(\bmod n)$ ، $c \equiv d(\bmod n)$ **فان** $a-b=k_1n$ ، $c-d=k_2n$ **لبعض** $k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$

$$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)=k_1n+k_2n=(k_1+k_2)n$$

$\Leftarrow \quad a+b \equiv (b+c)(\mathrm{mod}\, n)$

وكذلك $ac=(b+k_1n)(d+k_2n)=bd+(bk_2+bk_1+k_1k_2n)n=bd+k_3n$ حيث

$k_3=bk_2+dk_1+k_1k_2n \in z \quad \Leftarrow \quad ac \equiv bd\,(\mathrm{mod}\, n)$

(2) بما إن $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n) \quad \Leftarrow \quad a-b=kn$ لبعض $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftarrow \quad c(a-b)=ckn \quad \Leftarrow \quad ca-cb=(ck)n=k_1n$ حيث $k_1=kn \quad \Leftarrow \quad ca \equiv cb\,(\mathrm{mod}\, n)$

(3)سنبرهن بطريقة الاستقراء

بما ان $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\, n) \quad \Leftarrow \quad a^1 \equiv b^1(\mathrm{mod}\, n)$

$\Leftarrow$ العبارة صحيحة عندما $k=1$.

نفرض العبارة صحيحة عندما $k=m$ أي نفرض $a^m \equiv b^m\,(\mathrm{mod}\, n)$ ونثبت صحتها

عندما $k=m+1$ ، أي نبرهن $a^{m+1} \equiv b^{m+1}(\mathrm{mod}\, n)$

بما ان $a^m \equiv b^m\,(\mathrm{mod}\, n)$ وكذلك $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\, n)$ ، باستخدام الفرع (1) ، نحصل على

$a^m \times a \equiv b^m \times b\,(\mathrm{mod}\, n)$

$\Leftarrow \quad a^{m+1} \equiv b^{m+1}(\mathrm{mod}\, n)$ وعليه $a^k \equiv b^k\,(\mathrm{mod}\, n)$ لكل $k \in \mathbb{Z}^+$

ملاحظة

معكوس الحالة (2) من المبرهنة اعلاة غير صحيح، أي إذا كانت $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, n)$ فليس من الضروري ان يكون $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ **ومثل ذلك** $4 \times 3 \equiv 2 \times 3(\mathrm{mod}\, 3)$ **ولكن** $4 \not\equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$

مبرهنة (5.3)

إذا كانت $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, n)$ **و** $\mathrm{g.c.d}(c,n)=1$ **فان** $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$

البرهان :

بما إن $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, n)$ **فان** $ac-bc=kn$ **لبعض** $k \in \mathbb{Z} \quad \Leftarrow \quad c(a-b)=kn$

بما ان $\mathrm{g.c.d}(c,n)=1 \quad \Leftarrow \quad a-b$ يقبل القسمة على $n \quad \Leftarrow \quad a \equiv b\,(\mathrm{mod}\, n)$.

تعريف (6.3)

ليكن a عدد صحيح اختياري. يرمز لمجموعة كل الأعداد الصحيحة المتطابقة مع a معيار n **بالرمز** $[a]$ وتعرف بالصيغة $[a]=\{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a(\mathrm{mod}\, n)\}=\{x \in \mathbb{Z} : x=a+kn,\ k$ لبعض عدد صحيح $\}$ **ونطلق** على $[a]$ **صف التطابق** (Congruence Class) معيار n المعيّن بـ a **ونعزو لـ** a ممثل هذا الصف

مثال (7.3)

لتكن $n=4$ **فان**

$[0]=\{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4)\}=\{x \in \mathbb{Z} : x=4k,\ k$ لبعض عدد صحيح $\}$

$\Leftarrow \quad [0]=\{\cdots,-12,-8,-4,0,4,8,12,\cdots\}$

$[1]=\{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)\}=\{x \in \mathbb{Z} : x=1+4k,\ k$ لبعض عدد صحيح $\}$

$\Leftarrow \quad [1]=\{\cdots,-11,-7,-3,1,5,9,13,\cdots\}$

$[2]=\{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4)\}=\{x \in \mathbb{Z} : x=2+4k,\ k$ لبعض عدد صحيح $\}$

$\Leftarrow \quad [2]=\{\cdots,-10,-6,-2,2,6,10,14,\cdots\}$

$[3]=\{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)\}=\{x \in \mathbb{Z} : x=3+4k,\ k$ لبعض عدد صحيح $\}$

$\Leftarrow \quad [3]=\{\cdots,-9,-5,-1,3,7,11,15,\cdots\}$

$[4]=\{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 04(\mathrm{mod}\, 4)\}=\{x \in \mathbb{Z} : x=4+4k,\ k$ لبعض عدد صحيح $\}$

$\Leftarrow \quad [4]=\{\cdots,-8,-4,0,4,8,12,\cdots\}=[0]$

كذلك $[5]=[1]\ ,\ [6]=[2]\ ,\ [7]=[3]$ وهكذا

تعريف(8.3)
ليكن n عددا صحيحا موجبا . مجموعة صفوف التطابق معيار n $\{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]\}$ **تسمى مجموعة** الأعداد الصحيحة معيار n ، ويرمز لها بالرمز Z_n **أي أن** $Z_n=\{[0],[1],[2],...,[n-1]\}$ ويرمز لها اختصارا $Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$

مبرهنة(9.3)
ليكن n عددا صحيحا موجبا فان

(1) **لكل** $[a]\in Z_n$ **فان** $[a]\neq\emptyset$

(2) **إذا كانت** $[a]\in Z_n$ **و** $b\in[a]$ **فان** $[a]=[b]$

(3) **إذا كان** $[a],[b]\in Z_n$ حيث $[a]\neq[b]$ **فان** $[a]\cap[b]=\emptyset$

(4) $\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}[a]=\mathbb{Z}$

البرهان :

$$[a]=\{x\in z : x\equiv a(\bmod n)\}$$

(1) بما إن $a\equiv a(\bmod n)$ $\Leftarrow$ $a\in[a]$ وعليه $[a]\neq\emptyset$

(2) ليكن $x\in[a]$ $\Leftarrow$ $x\equiv a(\bmod n)$

بما ان $b\in[a]$ $\Leftarrow$ $b\equiv a(\bmod n)$ $\Leftarrow$ $a\equiv b(\bmod n)$ $\Leftarrow$ $x\equiv b(\bmod n)$ $\Leftarrow$ $x\in[b]$

$\Leftarrow$ $[a]\subseteq[b]$ وبالمثل نبرهن $[b]\subseteq[a]$ $\Leftarrow$ $[a]=[b]$

(3) **نفرض** $[a]\cap[b]\neq\emptyset$ $\Leftarrow$ يوجد $x\in\mathbb{Z}$ بحيث أن $x\in[a]\cap[b]$

$\Leftarrow$ $x\in[a]$ **و** $x\in[b]$ $\Leftarrow$ $x\equiv a(\bmod n)$ **و** $x\equiv b(\bmod n)$ $\Leftarrow$ $b\equiv x(\bmod n)$

$\Leftarrow$ $b\equiv a(\bmod n)$ $\Leftarrow$ $b\in[a]$. **باستخدام الفرع**(2) **نحصل على** $[a]=[b]$

(4) **بما ان** $[a]\subseteq\mathbb{Z}$ **لكل** $a\in\mathbb{Z}$ $\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}[a]\subseteq\mathbb{Z}$

ليكن $a\in\mathbb{Z}$ $\Leftarrow$ $a\in[a]$ $\Leftarrow$ $a\in\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}[a]$ $\Leftarrow$ $\mathbb{Z}\subseteq\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}[a]$ $\Leftarrow$ $\mathbb{Z}=\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}[a]$

تعريف(10.3)
العملية الثنائية $+_n$ **تعرف على** Z_n بالصيغة $[a]+_n[b]=[a+b]$ **لكل** $[a],[b]\in Z_n$

مثال (11.3)
$$[2]+_5[1]=[2+1]=[3],\quad [3]+_5[2]=[3+2]=[5]=[0],\quad [2]+_5[4]=[2+4]=[6]=[1]$$

مبرهنة(12.3)
لكل عدد صحيح موجب n ، النظام الرياضي $(Z_n,+_n)$ يشكل زمرة أبدالية. **تعرف بزمرة الأعداد الصحيحة** معيار n .(Group of Integers Modulo n).

البرهان :

(1) ليكن $[a],[b],[c]\in Z_n$

$$([a]+_n[b])+_n[c]=[a+b]+_n[c]=[(a+b)+c]=[a+(b+c)]=[a]+_n[b+c]=[a]+_n([b]+_n[c])$$

$\Leftarrow$ $+_n$ تجميعية .

(2) **بما ان** $[0]\in Z_n$

$$[a]+_n[0]=[a+0]=[a],\quad [0]+_n[a]=[0+a]=[a]$$

لكل $[a]\in Z_n$ $\Leftarrow$ $[0]$ العنصر المحايد.

(3) ليكن $[a]\in Z_n$ $\Leftarrow$ $[n-a]\in Z_n$

$[a]+_n[n-a]=[a+n-a]=[n]=[0],\quad [n-a]+_n[a]=[n-a+a]=[n]=[0]$

$\Leftarrow$ $[n-a]$ العنصر النظير للعنصر $[a]$.

(4) ليكن $[a],[b]\in Z_n$

$[a]+_n[b]=[a+b]=[b+a]=[b]+_n[a]$

$\Leftarrow$ $+_n$ ابدالية $\Leftarrow$ $(Z_n,+_n)$ زمرة ابدالية .

تمارين(3)

1.3 جد قيم x **للمعادلة** $3x\equiv 6(\mathrm{mod}\,15)$ حيث $0\le x\le 15$

2.3 برهن على ان $6^n\equiv 6(\mathrm{mod}\,10)$ **لكل** $n\in\mathbb{Z}^+$

3.3 لكل عدد صحيح a . برهن على انه أما $a^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ **أو** $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$

4.3 **إذا كان** $a^2\equiv b^2(\mathrm{mod}\,n)$ حيث n **عدد اولي** . برهن على انه أما $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$ **أو** $a\equiv -b(\mathrm{mod}\,n)$

5. باستخدام الحقيقة $10\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ للبرهنة على ان عددا صحيحا يقبل القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9

4. الزمرة التناظرية Symmetric Groups

تعريف (1.4)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن f **دالة من** X **إلى** X. يقال عن الدالة f بأنها تبديل (Permutation) على X **إذا كانت** f **دالة متقابلة** . وسنرمز لمجموعة التبادیل على المجموعة X **بالرمز** S_X

مثال(2.4)

(1) **إذا كانت الدالة** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=x+1$ **لكل** $x\in\mathbb{R}$ ، فإنها تبديل على $\mathbb{R}$ لأنها تقابلية

(2) **إذا كانت الدالة** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=x^2$ **لكل** $x\in\mathbb{R}$ ، فإنها ليست تبديل على $\mathbb{R}$ لأنها غير تقابلية

(3) **إذا كانت الدالة** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ معرفة بالصيغة $f(x,y)=(x,-y)$ **لكل** $x\in\mathbb{R}$ ، فإنها تبديل على $\mathbb{R}^2$ لأنها تقابلية

مبرهنة(3.4)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $f\in S_X$. **نعرف العلاقة** $\sim$ **على** X بالصيغة $x\sim y$ إذا وفقط إذا يوجد $m\in\mathbb{Z}$ بحيث ان $f^m(x)=y$ ،**فان** $\sim$ **على** X ، وعليه $[x]=\{f^m(x):m\in\mathbb{Z}\}$. ويسمى صف التكافؤ $[x]$ **مدار** (Orbit) التبديل الذي يحوي العنصر x.

البرهان:

(1) $\sim$ علاقة انعكاسية على X : ليكن $x\in X$

بما ان $f^0(x)=x$ $x\sim x$ ، وعليه $\sim$ علاقة انعكاسية على X

(2) $\sim$ **علاقة متناظرة على** X : ليكن $x,y\in X$ بحيث ان $x\sim y$

$\Leftarrow$ يوجد $m\in\mathbb{Z}$ بحيث ان $f^m(x)=y$

بما ان f تقابلية $f^{-m}(y)=x \Leftarrow y\sim x$ وعليه $\sim$ **علاقة متناظرة على** X

(3) $\sim$ **علاقة** متعدية على X : ليكن $x,y,z\in X$ بحيث ان $x\sim y$ ، $y\sim z$

$\Leftarrow$ يوجد $m,k\in\mathbb{Z}$ بحيث ان $f^m(x)=y$ ، $f^k(y)=z$

$\Leftarrow$ $f^{m+k}(x)=f^k(f^m(x))=f^k(y)=z$ ،وعليه $\sim$ علاقة متعدية على X

والان : **إذا كانت** $x\in X$ ،**فان** $[x]=\{y\in X:y\sim x\}=\{f^m(x):m\in\mathbb{Z}\}$

مبرهنة(4.4)

النظام الرياضي $(S_X,\circ)$ حيث o عملية تركيب الدوال تشكل زمرة تسمى بالزمرة التناظرية (Symmetric Group).

البرهان :

(1) S_X مغلقة بالنسبة لعملية تركيب الدوال o : **لتكن** $f,g\in S_X$

$\Leftarrow$ **كل من** f,g دالة تقابلية بما ان تركيب الدوال التقابلية يكون دالة تقابلية $f\circ g$ دالة تقابلية $\Leftarrow$ $f\circ g\in S_X$

(2) تركيب الدوال عملية تجميعية : ليكن $f,g,h\in S_X$

$\Leftarrow$ $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ (حسب خواص تركيب الدوال)

(3) العنصر المحايد : **نعرف الدالة** $\mathrm{I}_S:S\to S$ بالصيغة $\mathrm{I}_S(x)=x$ **لكل** $x\in S$ ، **أي ان** I_S الدالة الذاتية

$$(f\circ\mathrm{I}_S)(x)=f(\mathrm{I}_S(x))=f(x),\quad(\mathrm{I}_S\circ f)(x)=\mathrm{I}_S(f(x))=f(x)$$

$\Leftarrow$ $f\circ\mathrm{I}_S=\mathrm{I}_S\circ f=f$ وعليه الدالة الذاتية I هو العنصر المحايد

(4) العنصر النظير : ليكن $f\in S_X$ $\Leftarrow$ f دالة تقابلية $\Leftarrow$ f^{-1} دالة تقابلية $\Leftarrow$ $f^{-1}\in S_X$

$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x=\mathrm{I}_S(x),\quad(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x=\mathrm{I}_S(x)$$

$\Leftarrow$ $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=\mathrm{I}_S$ وعليه f^{-1} هو نظير العنصر f .

$\Leftarrow$ النظام الرياضي $(S_X,\circ)$ **زمره** .

ملاحظة
ليس بالضرورة ان تكون الزمرة $(S_X,\circ)$ ابدالية لان عملية تركيب الدوال غير أبدالية .

تعريف(5.4)
يقال عن الزمرة $(S_X,\circ)$ بأنها زمرة تناظر (Symmetric Group) **من الدرجة** n **إذا كانت** $X=\{1,2,\cdots,n\}$
ويرمز لها بالرمز (S_n,o) .

مبرهنة (6.4)
رتبة الزمرة (S_n,o) **تساوي** $n!$

البرهان:
بما إن $S=\{1,2,\cdots,n\}$
إن عدد احتمالات صورة العنصر الأول هو n ، إن عدد احتمالات صورة العنصر الثاني هو $n-1$.
إن عدد احتمالات صورة العنصر الثالث هو$n-1$ ، وهكذا يكون عدد احتمالات صورة العنصر n هو 1 .
وبالتالي يكون عدد كل الاحتمالات مساويا إلى $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1=n!$ وعليه $0(S_n)=n!$

ملاحظات
(1) يمكن التعبير عن أي تبديل $f\in S_n$ **بالشكل** $f=\{(1,f(1)),(2,f(2)),(3,f(3)),\ldots,(n,f(n))\}$ **أو بالشكل**

$$f=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ f(1)&f(2)&\cdots&f(n)\end{pmatrix} \text{ أو } f=\begin{pmatrix}i\\ f(i)\end{pmatrix},\ i=1,2,\cdots,n \text{ وان } \begin{pmatrix}i\\ f(i)\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}f(i)\\ i\end{pmatrix}$$

(2) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ f(1)&f(2)&\cdots&f(n)\end{pmatrix}\in S_n$ **وكان** $g=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ g(1)&g(2)&\cdots&g(n)\end{pmatrix}\in S_n$ ، **فان**

$$g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ g(f(1))&g(f(2))&\cdots&g(f(n))\end{pmatrix}\in S_n$$

(3) العنصر المحايد في الزمرة التناظرية $(S_n,\circ)$ هو $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ 1&2&\cdots&2\end{pmatrix}$

(4) العنصر النظير في الزمرة التناظرية $(S_n,\circ)$ هو

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ f(1)&f(2)&\cdots&f(n)\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}f(1)&f(2)&\cdots&f(n)\\ 1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$$

ملاحظة
لا يهم ترتيب الأعمدة في الصيغة اعلاة بل المهم ان تكون صورة العنصر تحته مباشرة ، **فمثلا في المثل** اعلاة يمكن أعادة كتابته بالشكل الأتي:

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\ 2&1&3\end{pmatrix} \text{ أو } \begin{pmatrix}2&1&3\\ 3&2&1\end{pmatrix} \text{ أو } \begin{pmatrix}3&2&1\\ 1&3&2\end{pmatrix}$$

مثل(7.4)
عناصر الزمرة التناظرية (S_3,o) هي

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\ 1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\ 2&1&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\ 3&2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\ 1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\ 2&3&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\ 3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

حيث $\mathrm{o}(S_3)=3!=6$ وهي زمرة غير أبدالية لان

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\ 2&1&3\end{pmatrix}0\begin{pmatrix}1&2&3\\ 3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\ 3&2&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\ 3&1&2\end{pmatrix}0\begin{pmatrix}1&2&3\\ 2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\ 1&3&2\end{pmatrix}$$

وعلية الزمرة (S_n,o) غير أبدالية عندما $n\geq3$.

مبرهنة(8.4)

إذا كانت $f \in S_n$ **فان** $[x]=\{x, f(x), \cdots, f^{m-1}(x)\}$ **لكل** $x=1,2,\cdots,n$

البرهان :

ليكن $X=\{1,2,\cdots,n\}$ $\Leftarrow$ $f(x), f^2(x), \cdots \in X$ **لكل** $x \in X$

$\Leftarrow$ يوجد $r,s \in \mathbb{Z}$ بحيث ان $f^r(x)=f^s(x)$ وعليه إذا كانت $m=|r-s|$ **فان** $f^m(x)=x$

بما ان $[x]=\{f^m(x): m \in \mathbb{Z}\}$ $\Leftarrow$ $[x]=\{x, f(1), \cdots, f^{m-1}(x)\}$

مثال(9.4)

(1) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ ، **فان** $f(1)=2$ $\Leftarrow$ $f^2(1)=f(f(1))=f(2)=1$ ،

وعليه $[1]=[2]=\{1,2\}$ **وكذلك** $f(3)=4$ $\Leftarrow$ $f^2(3)=f(f(3))=f(4)=3$ ، وعليه $[3]=\{3,4\}$

لاحظ ان $[1]\cap[3]=\varnothing$, $[1]\cup[3]=\{1,2,3,4\}=X$ $\mathcal{F}=\{[1],[3]\}$ **تشكل تجزئة للمجموعة** X .

(2) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ ، **فان** $[1]=\{1,4,3,2,5\}$

(3) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$ ، **فان** $[1]=\{1,2,3,4\}$

(4) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in S_7$ ، **فان** $[1]=\{1,2,3,4,5,6\}$

تعريف(10.4)

يقال عن التبديل $f \in S_n$ بأنه دائري (Cyclic) **أو دورة** (Cycle) إذا كانت تمتلك مدارا واحدا على الأكثر يحوي **أكثر من عنصر واحد** .

إذا كان كل مدار للتبديل f يحوي عنصرا واحد فقط قيل عن f إنها تبديل ذاتي (Identity Permutation) **أو** دورة أحادية الطول (1-Cycle) ، **أما إذا كانت** f دورة مدارها A ، $0(A)=r>1$ قيل عن f إنها دورة طولها r **أو دورة رائية الطول** ($r-$Cycle) وعبر عنها بالشكل $(a_1a_2\cdots a_r)$.

ويقال عن التبديل f بأنه مناقلة (Transposition) **إذا كانت** $r=2$

وبصياغة أخرى :

لتكن $a_1,a_2,\cdots,a_r$ هي r من الأعداد الصحيحة المختلفة بحيث $1\le a_i \le r$. يقال عن التبديل $f \in S_n$ بأنها دورة طولها r **إذا كان :** (1) $f(a_i)=a_{i+1}$ **عندما** $1\le i \le r$ (2) $f(a_r)=a_1$ (3) $f(a)=a$ **عندما** $a \notin \{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$

وتكتب بالشكل $(a_1a_2\cdots a_r)$

مثال(11.4)

(1) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$ ، **فان** $[1]=\{1\}, \quad [2]=\{2\}, \quad [3]=\{3\}$

$\Leftarrow$ f تبديل ذاتي $\Leftarrow$ $f=(1)=(2)=(3)$

(2) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$ ، **فان** $[1]=\{1\}, \quad [2]=\{2,3\}$

$\Leftarrow$ f ثنائية الطول $\Leftarrow$ $f=(23)$ وعليه f **مناقلة**

(3) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$ ، **فان** $[1]=\{1,3,2\}, \quad [4]=\{4\}$

$\Leftarrow$ f دورة ثلاثية الطول $\Leftarrow$ $f=(132)$

(4) إذا كان $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\in S_4$ ، فان $[1]=\{1,2\},\quad [3]=\{3,4\}$

$\Leftarrow$ f ليست دائرية لأنها تمتلك مدارين في كل منها أكثر من عنصر واحد.

(5) إذا كان $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&5&1\end{pmatrix}\in S_5$ ، فان $[1]=\{1,3,4,5\},\quad [2]=\{2\}$

$\Leftarrow$ f دورة رباعية الطول $\Leftarrow$ $f=(1345)$

(6) إذا كان $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&2&4&3\end{pmatrix}\in S_5$ ، فان $[1]=\{1\},\quad [2]=\{2,5,3\},\quad [4]=\{4\}$

$\Leftarrow$ f دورة ثلاثية الطول $\Leftarrow$ $f=(253)$

(7) إذا كان $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&1&5&6\end{pmatrix}\in S_6$ ، فان $[1]=\{1,2,3,4\},\quad [5]=\{5\},\quad [6]=\{6\}$

$\Leftarrow$ f دورة رباعية الطول $\Leftarrow$ $f=(1234)$

وبصورة عامة

$S_3=\{e,(12),(13),(23),(123),(132)\}$

$S_4=\{e,(12),(13),(14),(23),(24),(34),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12),(34),$
$(13),(24),(14),(23),(1234),(1432),(1243),(1342),,(1324),(1423)\}$

وهكذا

تعريف(12.4)

يقال عن دورتين $\sim=(a_1a_2\cdots a_r),\quad =(b_1b_2\cdots b_s)$ بأنهما متنافيتان(Disjoint) **إذا كان**

$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}\cap\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}=¤$

مثال(13.4)

الدورتان (45), (123) متنافيتان لان $\{1,2,3\}\cap\{4,5\}=¤$ ، بينما الدورتين (456), (1234) غير متنافيتين **لان** $\{1,2,3,4\}\cap\{4,5,6\}=\{4\}\neq¤$.

مبرهنة (14.4)

إذا كان $\sim=(a_1a_2\cdots a_r),\quad =(b_1b_2\cdots b_s)$ دورتين متنافيتين في S_n **فان** $\circ\sim=\sim\circ$

البرهان :

بما ان $\sim=(a_1a_2\cdots a_r),\quad =(b_1b_2\cdots b_s)$ دورتين متنافيتين $\Leftarrow$ $[a_1]\cap[b_1]=¤$

ولكي نبرهن $\circ\sim=\sim\circ$: **نفرض ان** $i\in X=\{1,2,\cdots,n\}$ ، $i\in[a_1]$ $\Leftarrow$ $i=a_k$ حيث $1\le k\le r$ ، وعليه $i\notin[b_1]$ **فان** $(i)=i$

ومنه ينتج $(\sim\circ\ )(i)=\sim(\ (i))=\sim(a_k)=a_{k+1}$ بينما $(\ \circ\sim)(i)=\ (\sim(i))=\ (a_{k+1})=a_{k+1}$ (**لان** $a_{k+1}\in[b_1]$)

$\Leftarrow$ $\circ\sim=\sim\circ$

مبرهنة(15.4)

كل تبديل $f\in S_n$ يمكن كتابته بصيغة جداء تبديلي لدورات ليس في أي اثنين منهما عنصر مشترك . **بعبارة** أخرى يمكن التعبير عن أي تبديل $f\in S_n$ بطريقة وحيدة (بعد حذف الدورات الأحادية الطول) كتركيب عدد معين من الدورات المتنافية.

البرهان:

نفرض $[1],[2],[3],\cdots,[m]$ هي مدارات التبديل f

$\Leftarrow \quad [i]\cap[j]=\emptyset$ لكل $i\neq j$ وكذلك $\bigcup_{i=1}^{m}[i]=\{1,2,\cdots,n\}$

بما ان $[i]=\{i,f(i),\cdots,f^{n_i-1}(i)\}$ حيث n_i اصغر عدد صحيح موجب بحيث ان $f^{n_i-1}(i)=i$

$\Leftarrow \quad \sigma_i=(i,f(i),\cdots,f^{n_i-1}(i))$ دورات متنافية و $f=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\cdots\circ\sigma_r$.

ولكي نثبت الوحدانية (نبرهن ان ذلك التعبير وحيدا بعد حذف الدورات الأحادية الطول) :

نفرض $f=\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_r$ ، $f=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\cdots\circ\sigma_r$ حيث $\sigma_i,\ \tau_i$ دورات منفصلة طول كل منها اكبر من الواحد

ولنفرض ان $\sigma_i(x)\neq x$ **لكل** $x\in\{1,2,\cdots,n\}$ $\Leftarrow$ $\tau_i(x)\neq x$ لبعض قيم $1\leq i\leq s$ وحيث ان $\tau_i\circ\tau_j=\tau_j\circ\tau_i$

(حسب المبرهنة14.4) $\Leftarrow$ يمكننا ان نفرض ان $\tau_1(x)\neq x$ وعليه فان $\tau_j(x)=x$ **لكل** $1\leq j\leq s$ **وبالتالي فان**

$\tau_1=\sigma_1=(x,\sigma(x),\cdots,\sigma^{k-1}(x))$. وبنفس الطريقة نبرهن $\sigma_2=\tau_3,\ \sigma_3=\tau_2,\cdots,\ \sigma_r=\tau_r$

مثال(16.4)

(1) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\in S_4$ ، **فان** $f=(12)(34)$

(2) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&1&6&5&4\end{pmatrix}\in S_6$ ، **فان** $f=(123)(46)(5)=(123)(46)$

(3) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&3&5&4&7&6\end{pmatrix}\in S_7$ ، **فان** $f=(12)(45)(76)$

(4) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&3&4&2&6&7&5&1\end{pmatrix}\in S_8$ ، **فان** $f=(18)(234)(567)$

مبرهنة(17.4)

كل تبديل يمكن التعبير (كتابته)**على شكل حاصل ضرب مناقلات** .

البرهان:

ليكن $f\in S_n$ ، باستخدام المبرهنة(15.4) ، يكون $f=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\cdots\circ\sigma_r$ حيث σ_i دورات متنافية

بما ان إذا كان $\sigma=(a_1a_2\cdots a_m)$ ، **فان** $\sigma=(a_1a_m)(a_1a_{m-1})\cdots(a_1a_2)$ ، وعليه يمكن التعبير عن f **على شكل حاصل ضرب مناقلات**.

ملاحظات

مماتقدم نستنتج

(1) **إذا كان** $\sigma=(a_1a_2\cdots a_m)$ **فان** $\sigma=(a_1a_m)(a_1a_{m-1})\cdots(a_1a_2)$

(2) **حاصل الضرب في المبرهنة** أعلاه غير إبدالي وغير **وحيد ومثال على ذلك** $(123)=(13)\circ(12)=(21)\circ(13)\circ(23)$

(3) العنصر النظير للدورة $\sigma=(a_1a_2\cdots a_m)$ هو $\sigma^{-1}=(a_1a_ma_{m-1}\cdots a_2)$

مثال(18.4)

(1) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in S_3$ ، **فان** $f=(123)=(13)(12)$

لاحظ ان $f=(12)(23)$ ، وعليه فان التعبير عن f

(2) **إذا كان** $f=(1243)\in S_4$ ، **فان** $f=(13)(14)(12)$

(3) **إذا كان** $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}\in S_5$ ، **فان** $f=(12)(345)=(12)(35)(34)$

(4) **إذا كان** $f=(123)(345)(56)\in S_6$ ، **فان** $f=(13)(12)(35)(34)(56)$

(5) $(13254)^{-1}=(14523)$ ، $(1234)^{-2}=(1234)^{-1}\circ(1234)^{-1}=(1432)\circ(1432)=(13)\circ(24)$

تعريف(19.4)

يقال عن التبديل $f \in S_n$ بأنه زوجيا (Even Permutation) إذا أمكن التعبير عنه كحاصل ضرب **عدد زوجي** من المناقلات، ويقال بأنه فرديا (Odd Permutation) إذا أمكن التعبير عنه كحاصل ضرب عدد فرديا من المناقلات .

مثل(20.4)

(1) **إذا كان** $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$، $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **، فان** $g = (14)(12)$، $f = (13)(12)$ وعليه كل من f, g تبديلا زوجيا . **لاحظ** $g \circ f = (14)(23)$، $f \circ g = (13)(24)$ وكل منها تبديلا زوجيا.

(2) **إذا كان** $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$، $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **، فان** $g = (15)(26)(23)(24)$، $f = (16)(13)(12)$ وعليه f تبديلا فرديا بينما g تبديلا زوجيا . **لاحظ ان**

$$f \circ g = (152463) = (13)(16)(14)(12)(15), \quad g \circ f = (143265) = (15)(16)(12)(13)(14)$$

وكل من $g \circ f$ ، $f \circ g$ تبديل فردي

(3) **إذا كان** $g = (2435) \in S_6$، $f = (1236)$ **فان كلا من** f, g تبديلا فرديا لان $f = (16)(13)(12), \quad g = (25)(23)(24)$

بينما $g \circ f = (16)(13)(14)(25)$، $f \circ f = (16)(14)(12)(35)$ وكل منهما تبديل زوجي

ملاحظة

(1) تركيب تبديلين زوجيين يكون تبديل زوجي . (2) تركيب تبديلين فرديين يكون تبديل زوجي .

(3) تركيب تبديل زوجي وأخر فردي يكون تبديل فردي .

مبرهنة(21.4)

لتكن A_n تمثل مجموعة التباديل الزوجية في S_n **فان** $0(A_n) = \frac{n!}{2}$ **لكل** $n \geq 2$

البرهان :

لتكن $\sim = (12)$ $\Leftarrow$ α تبديل فردي . نعرف الدالة $\varphi : S_n \to S_n$ بالصيغة $\varphi(f) = \sim \circ f$ لكل $f \in S_n$ $\Leftarrow$ φ دالة تقابلية $\Leftarrow$ يقرن كل تبديل زوجي بتبديل فردي وكل تبديل فردي بتبديل زوجي ، وعليه فان $\varphi(A_n)$ هي مجموعة التباديل الفردية في S_n . ولكن $A_n \cap ¨(A_n) = ¤$، $S_n = A_n \cup ¨(A_n)$

وكذلك $0(A_n) = 0((A_n))$ $\Leftarrow$ $0(S_n) = 2 \times 0(A_n)$ $\Leftarrow$ $n! = 2 \times 0(A_n)$ $\Leftarrow$ $0(A_n) = \frac{n!}{2}$

تمارين (4)

1.4 عبر عن كل من التباديل التالية كحاصل ضرب دورات منفصلة

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $(124)(234)$

2.4 عين التباديل الفردية والتباديل الزوجية في كل ممماياتي

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ (3) (12345) (4) $(1234)(23567)$

3.4 اوجد التبديل $f \in S_4$ بحيث ان (1) $f^2 = (1)$ (2) $f^3 = (1)$

4.4 حدد إشارة كل من التباديل التالية

(1) $(123) \in S_3$ (2) $(123)(45) \in S_5$ (3) $(468315) \in S_8$ (4) $(123456)(89) \in S_{10}$

5. الزمر الجزئية Subgroups

تعريف(1.5)

لتكن $(G,*)$ **زمرة ولتكن** H مجموعة جزئية غير خالية من G. يقال عن $(H,*)$ بأنها زمرة جزئية (Subgroup) **من الزمرة** $(G,*)$ **أذا كانت** $(H,*)$ زمرة بحد ذاتها.

ملاحظات

(1) كل زمرة تحتوي على الأقل زمرتين جزئيتين هما $(\{e\},*)$ (حيث e هو عنصر المحايد) **والزمرة** نفسها وغالبا ما

يطلق على هاتين الزمرتين الجزئيتين اسم الزمرة الجزئية التافهة(Trivial Subgroup).**أما بالنسبة** لبقية الزمر الجزئية

الأخرى ان وجدت فيطلق عليها غير تافهة.

(2) أية زمرة جزئية $(G,*)$ **تختلف عنها تسمى** زمرة جزئية فعلية (proper Subgroup) **من** $(G,*)$.

مثال(2.5)

(1) $(\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Q},+)$ **والزمرة** $(\mathbb{Q},+)$ هي زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{R},+)$

(2) $(\mathbb{Z}_e,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ في حين $(\mathbb{Z}_0,+)$ ليست كذلك

المبرهنة التالية تبين لنا متى تكون مجموعة جزئية من زمرة ما تكون زمرة جزئية.

مبرهنة(3.5)

لتكن $(G,*)$ **زمرة ولتكن** H مجموعة جزئية غير خالية من G. **فان** $(H,*)$ **تكون زمرة** جزيئية **من** $(G,*)$ إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية (1) **أذا كان** $a.b \in H$ **فان** $a*b \in H$ (2) **أذا كان** $a \in H$ **فان** $a^{-1} \in H$

البرهان :

نفرض $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*) \Leftarrow (H,*)$ فهي زمرة بحد ذاتها وعليه فان الشرطين(1)، (2) **متحققان.**

الاتجاه الأخر : نفرض $(H,*)$ **تحقق الشرطان** (1)،(2) متحققان ونبرهن $(H,*)$ **زمرة**

(أ) ليكن $a,b,c \in H$ ، **بما ان** $H \subseteq G \Leftarrow a,b,c \in G$ ، **بما ان** $*$ عملية تجميعية على G

$a*(b*c)=(a*b)*c \Leftarrow *$ عملية تجميعية على H

(ب) **بما ان** $H \neq \phi \Leftarrow$ يوجد $a \in H$ ، **باستخدام الشرط** (1) يكون $a^{-1} \in H$، **وباستخدام الشرط** (1) يكون $a*a^{-1} \in H$

ولكن $a*a^{-1}=e \Leftarrow e \in H$

(ج) ليكن $a \in H$ ، **حسب الشرط**(2) يكون $a^{-1} \in H$ وعليه من (أ)،(ب)،(ج) **تكون** $(H,*)$ زمرة جزيئية

المبرهنة التالية تسهل بصورة أكثر معرفة فيما إذا كانت مجموعة جزئية من الزمرة أم لا؟

مبرهنة(4.5)

لتكن $(G,*)$ **زمرة ولتكن** H مجموعة جزئية غير خالية من G. **فان** $(H,*)$ **تكون** زمرة جزيئية **من** $(G,*)$ **إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي : أذا كان** $a,b \in H$ **فان** $a*b^{-1} \in H$

البرهان :

نفرض $(H,*)$ زمرة جزئية

ليكن $a,b \in H$ ، **بما ان** $(H,*)$ **زمرة وان** $b \in H \Leftarrow b^{-1} \in H$

اصبح $a,b^{-1} \in H \Leftarrow a*b^{-1} \in H$

الاتجاه الأخر : **نفرض** $(H,*)$ **تحقق للشرط أذا كان** $a,b\in H$ **فان** $a*b^{-1}\in H$. يجب ان نبرهن $(H,*)$ **زمرة**

بما ان $H\neq\phi$ $\Leftarrow$ يوجد $a\in H$ ، باستخدام الشرط يكون $a*a^{-1}\in H$، **ولكن**

$$e\in H \quad\Leftarrow\quad a*a^{-1}=e$$

اصبح لدينا $a,e\in H$، **وباستخدام الشرط مرة أخرى ، نحصل على** $e*a^{-1}\in H$ ، **ولكن**

$$a^{-1}\in H \quad\Leftarrow\quad e*a^{-1}=a^{-1}$$

وهذا يعني لكل $a\in H$ ، **فان** $a^{-1}\in H$

ليكن $a,b,c\in H \quad\Leftarrow\quad b^{-1}\in H$

اصبح $a,b^{-1}\in H \quad\Leftarrow\quad a*(b^{-1})^{-1}\in H \quad\Leftarrow\quad a*b\in H$

وعليه باستخدام المبرهنة (3.4) **تكون** $(H,*)$ زمرة جزيئية

المبرهنة التالية تبين في حالة كون المجموعة الجزئية منتهية فيكفي شرط الانغلاق يجعلها زمرة جزئية.

مبرهنة(5.5)

لتكن $(G,*)$ **زمرة ولتكن** H مجموعة جزئية منتهية غير خالية من G. **فان** $(H,*)$ تكون زمرة جزئية من **الزمرة** $(G,*)$ **أذا وفقط إذا فان تحقق للشرط التالي : أذا كان** $a,b\in H$ **فان** $a*b\in H$

البرهان :

نفرض $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ $\Leftarrow$ $(H,*)$ فهي زمرة بحد ذاتها وعليه فان **الشرط متحقق**

الاتجاه الأخر : **نفرض** $(H,*)$ **تحقق للشرط أذا كان** $a,b\in H$ **فان** $a*b\in H$ ونبرهن $(H,*)$ **زمرة**

ليكن $a\in H$ نحتاج فقط ان نبرهن $a^{-1}\in H$.

بما ان $a\in H$، **باستخدام للشرط ، نحصل على** $a^2=a*a\in H$ ، **وكذلك** $a^3=a*a^2\in H$،

وعليه $a^n\in H$ حيث ان $n\in\mathbb{Z}^+$

لتكن $S=\{a,a^2,\cdots,a^n,\cdots\}$ $\Leftarrow$ $S\subseteq H$ وهذا تناقض لان H منتهية

$\Leftarrow$ يوجد $r,t\in\mathbb{Z}$ ، $0<r<t$ بحيث ان $a^r=a^t \quad\Leftarrow\quad a^r*a^{-t}=e,\quad a^t*a^{-r}=e$

بما ان $t-r>0 \quad\Leftarrow\quad a^{t-r}\in H \quad\Leftarrow\quad e\in H$

وبما ان $r,t\in\mathbb{Z}^+$ **و** $t-r>0 \quad\Leftarrow\quad t-r-1>0 \quad\Leftarrow\quad a^{t-r-1}\in H$

ولكل $a^{t-r-1}=a^{t-r}*a^{-1}=e*a^{-1}=a^{-1} \quad\Leftarrow\quad a^{-1}\in H$ وعليه $(H,*)$ زمرة جزيئية

ملاحظة

لتكن $(G,*)$ زمرة جزئية ولتكن H مجموعة جزئية غير منتهية من G بحيث أن $a*b\in H$ **لكل** $a,b\in H$ فليس من الضروري أن تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$. **والمثل التالي** يوضح ذلك

مثل(6.5)

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مغلقة بالنسبة لعملية الجمع الاعتيادية ولكن النظام الرياضي $(\mathbb{N},+)$ ليس زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$.

تعريف(7.5)

مركز (Center) **الزمرة** $(G,*)$، يرمز له بالرمز $Cent(G)$ ويعرف بالصيغة

$$Cent(G)=\{a\in G : a*x=x*a \quad \forall x\in G\}$$

ملاحظة

إذا كانت $(G,*)$ زمرة ابدالية فان $Cent(G)=G$

مبرهنة(8.5)

لتكن $(G,*)$ **زمرة، فان** $(Cent(G),*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$.

البرهان :

بما ان $e*x=x*e$ **لكل** $x\in G$ $\Leftarrow$ $e\in Cent(G)$ $\Leftarrow$ $Cent(G)\neq\phi$

ليكن $a,b\in Cent(G)$ **لكل** $x\in G$

$$(a*b^{-1})*x=a*(b^{-1}*x)=a*(x^{-1}*b)^{-1}$$

بما ان $x\in G$ $\Leftarrow$ $x^{-1}\in G$ **وكذلك بما ان** $b\in Cent(G)$ $\Leftarrow$ $b*x^{-1}=x^{-1}*b$

$$(a*b^{-1})*x=a*(b*x^{-1})^{-1}=a*(x*b^{-1})=(a*x)*b^{-1}$$

بما ان $x\in G$ **و بما ان** $a\in Cent(G)$ $\Leftarrow$ $a*x=x*a$

$(a*b^{-1})*x=(x*a)*b^{-1}=x*(a*b^{-1})$ $\Leftarrow$ $a*b^{-1}\in Cent(G)$ $\Leftarrow$ $(Cent(G),*)$ **زمرة** جزئية من $(G,*)$.

مبرهنة(9.5)

لتكن كل من $(H,*),(K,*)$ زمر جزئية من الزمرة $(G,*)$ **فان** $(H\cap K,*)$ تكون زمرة جزئية من **الزمرة** $(G,*)$

البرهان :

بما ان $e\in H,\ e\in K$ $\Leftarrow$ $e\in H\cap K$ $\Leftarrow$ $H\cap K\neq\phi$

ليكن $a,b\in H\cap K$ $\Leftarrow$ $a,b\in H,\ \ a,b\in K$

بما ان كل من $(H,*),(K,*)$ زمر جزئية من الزمرة $(G,*)$ $\Leftarrow$ $a*b^{-1}\in H$ **و** $a*b^{-1}\in K$

$\Leftarrow$ $a*b^{-1}\in H\cap K$

$\Leftarrow$ $(H\cap K,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

ملاحظة

من الممكن تعميم المبرهنة السابقة إلى النتيجة التالية وسوف نذكرها بدون برهان.

نتيجة(10.5)

أذا كانت $\{(H_\alpha,*)\}_{\alpha\in\Lambda}$ عائلة من الزمر الجزئية من الزمرة $(G,*)$ **فان** $(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha,*)$ تكون زمرة جزئية

ملاحظة

لتكن كل من $(H,*),(K,*)$ زمر جزئية من الزمرة $(G,*)$ **فليس** من الضروري **ان** يكون $(H\cup K,*)$ تكون زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ والمثال التالي يوضح ذلك

مثال(11.5)

في زمرة الأعداد الصحيحة $(Z_{12},+_{12})$ معيار 12 **كل من** $(H,*),(K,*)$ زمر جزئية من **الزمرة** $(Z_{12},+_{12})$

حيث $H=\{0,6\}$ ، $K=\{o,4,8\}$ **ولكن** $(H\cup K,*)$ ليس زمرة جزئية من $(Z_{12},+_{12})$ **لان**

$H\cup K=\{0,4,6,8\}$ **وان** $4,6\in H\cup K$ **ولكن** $4+_{12}6=10\notin H\cup K$.

مبرهنة (12.5)

لتكن كل من $(H,*),(K,*)$ زمر جزئية من الزمرة $(G,*)$ **فان** $(H\cup K,*)$ تكون زمرة جزئية من **الزمرة** $(G,*)$ **أذا وفقط أذا كان** $H\subseteq K$ **أو** $K\subseteq H$.

البرهان :

نفرض ان $H\subseteq K$ **أو** $K\subseteq H$ $\Leftarrow$ $H\cup k=K$ **أو** $H\cup K=H$

وعليه في كلا الحالتين يكون $(H\cup K,*)$ تكون زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

الاتجاه الأخر : **نفرض** $(H \cup K,*)$ زمرة جزئية

سنبرهن بطريقة التناقض: **نفرض** $H \not\subseteq K$ **و** $K \not\subseteq H$

$\Leftarrow$ يوجد $a \in H$ بحيث ان $a \notin K$ وكذلك يوجد $b \in K$ بحيث ان $b \notin H$ $\Leftarrow$ $a,b \in H \cup K$

بما ان $(H \cup K,*)$ تكون زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ $\Leftarrow$ $a*b \in H \cup K$

أما $a*b \in H$ **أو** $a*b \in K$

(1) **إذا كان** $a*b \in H$ ، **بما ان** $a \in H$ $\Leftarrow$ $a^{-1} \in H$ $\Leftarrow$ $a^{-1}*(a*b) \in H$ $\Leftarrow$ $b \in H$ وهذا **تناقض**

(2) **إذا كان** $a*b \in K$ ، **بما ان** $b \in H$ $\Leftarrow$ $b^{-1} \in H$ $\Leftarrow$ $(a*b)*b^{-1} \in H$ $\Leftarrow$ $a \in K$ وهذا **تناقض**

وعليه أما $H \subseteq K$ **أو** $K \subseteq H$

ملاحظة

كل زمرة لايمكن ان تكون من اتحاد زمرتين جزئيتين غير تافهتين .

تعريف (13.5)

لتكن $(G,*)$ **زمرة ولتكن** S مجموعة جزئية غير خالية من G .اصغر زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$ **والتي تحتوي على** S تسمى بالزمر الجزئية لمتولدة (Generated) **بواسطة المجموعة** S ويرمز لها بالرمز $((S),*)$

ومن التعريف مباشرة يمكن إثبات الأتي :

(1) $S \subset (S)$

(2) $((S),*)$ **تساوي** تقاطع كل الزمر الجزئية للزمرة الجزئية $(G,*)$ **التي تحتوي على** S

(3) $(S,*)$ تكون زمرة جزئية من $(G,*)$ **أذا وفقط أذا كانت** $S = (S)$

(4) $(S) = \{a_1 * a_2 * \cdots * a_n : a_1, a_2, \cdots, a_n \in S \cup S^{-1}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ **حيث** $S^{-1} = \{a^{-1} : a \in S\}$

مثال (14.5)

الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ مولدة بمجموعة الأعداد الصحيحة الفردية $\mathbb{Z}_0$ **، أي ان** $(\mathbb{Z}_0) = \mathbb{Z}$

أذا كانت S **تحتوي على عنصر واحد فقط مثلاً** $S = \{a\}$ **وفي** هذه الحالة نكتب (a) **بدلا من** $(\{a\})$ **، أي أن**

$(S) = (\{a\}) = (a)$

والزمرة الجزئية $((a),*)$ تسمى الزمرة الجزئية الدائرية (Cyclic Subgroup) **المولدة بواسطة العنصر** a ويمكن أن نبرهن على

$(a) = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$

(1) **أذا كانت** $(a) = G$ **لبعض** $a \in G$ في هذه الحالة يقال عن الزمرة $(G,*)$ بأنها دائرية مولدها **العنصر** a .

(2) يمكن أن يكون للزمرة الدائرية مولدات عديدة مختلفة .وفي الواقع يكون دائما لدينا $(a) = (a^{-1})$

(3) كل زمرة دائرية يجب أن تكون أبدالية . **لان**

ليكن $x, y \in (a)$ $\Leftarrow$ يوجد $n, m \in \mathbb{Z}$ بحيث ان $x = a^n, \ y = a^m$

$x * y = a^n * a^m = a^{n+m} = a^m * a^n = y * x$

زمرة تناظر المربعات G_s ليست دائرية لأنها ليست ابدالية .

(4) أذا كانت الزمرة الدائرية $((a),*)$ منتهية رتبتها n **. فان** $(a) = \{e, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$

(5) كل زمرة جزئية من زمرة دائرية تكون أيضا دائرية .

(6) أذا كانت $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة الدائرية $((a),*)$ ، $H \neq \{e\}$ فان $H=(a^n)$ حيث n اصغر عدد صحيح
موجب بحيث أن $a^n \in H$

مثال(15.5)
تأمل زمرة $(\mathbb{Z},+)$ الأعداد الصحيحة
ليكن $a \in \mathbb{Z}$ ، بما ان $(a)=\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$
بما ان $a^n = a*a*\cdots*a = a+a+a+\cdots+a = na \Leftarrow (a)=\{na : n \in \mathbb{Z}\}$
(1)) إذا كانت $a=0 \Leftarrow (0)=\{0\times n : n\in\mathbb{Z}\}=\{0\}$
(2)) إذا كانت $a=1 \Leftarrow (1)=\{n : n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}$
(3) إذا كانت $a=-1 \Leftarrow (-1)=\{-n : n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}$
$\Leftarrow$ $(\mathbb{Z},+)$ زمرة دائرية مولدها 1 أو (-1) ، أي ان $(\mathbb{Z})=(1)=(-1)$.
(4) إذا كانت $a=2 \Leftarrow (2)=\{2n : n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}_e \Leftarrow (\mathbb{Z}_e,+)$ زمرة دائرية مولدها 2.

مثال(16.5)
تأمل زمرة الأعداد الصحيحة $(Z_{12},+_{12})$ معيار 12.

$$Z_{12}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$$
$$(1)=(5)=(7)=(11)=\mathbb{Z}_{12}$$

$\Leftarrow$ $(Z_{12},+_{12})$ زمرة دائرية مولدها 1، 5، 7، 11.

ملاحظة
زمرة الأعداد الصحيحة $(Z_n,+_n)$ معيار n هي زمرة دائرية مولدها 1.

مثال(17.5)
الزمرة $(G,\cdot)$ حيث ان $G=\{1,-1,-i,i\}$، $i^2=-1$ زمرة دائرية مولدها i لان
$$(i)=\{i^n : n\in\mathbb{Z}\}=\{-1,1,i,-i\}=G$$

مثال(18.5)
برهن على ان $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ زمرة ابدالية وليست دائرية

الحل :
واضح ان $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ زمرة ابدالية. بقي ان نبرهن الزمرة $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ ليست دائرية
سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض ان $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ دائرية
$\Leftarrow$ يوجد $q\in\mathbb{Q}^*$ بحيث ان $(q)=\{q^n : n\in\mathbb{Z}\}$ ، أي يوجد $a,b\in\mathbb{Z}$ بحيث ان
$$(\frac{a}{b})=\{(\frac{a}{b})^n : n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Q}^*$$

بما ان $2,3\in\mathbb{Q}^* \Leftarrow$ يوجد $n,m\in\mathbb{Z}$ بحيث ان $3=(\frac{a}{b})^m,\quad 2=(\frac{a}{b})^n \Leftarrow 2^m=3^n$ وهذا غير ممكن.

تعريف(19.5)
لتكن $(G,*)$ زمرة وليكن كل من H,K مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة G. **نعرف المجموعة** $H*K$ بالصيغة

$$H*K=\{h*k : h\in H, k\in K\}$$

تمارين(5)

1.5 بين فيما إذا كانت $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ **لكل مما** ياتي ؟ مع البرهان

(1) **إذا كانت** $G=\{-1,1,-i,i\},\quad H=\{-1,1\},$ **وان** $*$ تمثل عملية الضرب الاعتيادية على الأعداد.

(2) **إذا كانت** $G=\mathbb{Q}^*,\quad H=\{2^n : n\in\mathbb{Z}\},$ **وان** $*$ تمثل عملية الضرب الاعتيادية على الأعداد.

(3) **إذا كانت** $G=\mathbb{R}^*,\quad H=\mathbb{Q}^*,$ **وان** $*$ تمثل عملية الضرب الاعتيادية على الأعداد.

(4) **إذا كانت** $G=\mathbb{Q}^*,\quad H=\{\frac{1+2n}{1+2m} : n,m\in\mathbb{Z}\},$ **وان** $*$ تمثل عملية الضرب الاعتيادية على الأعداد.

2.5 برهن على ان $(\{0,4,8,12\},+_{16})$ هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $(Z_{16},+_{16})$ معيار 16.

3.5 **لتكن** $H=\{f\in S_n : f(n)=n\}$. برهن على ان $(H,\circ)$ زمرة جزئية من الزمرة $(S_n,\circ)$

4.5 **لتكن** $(G,*)$ **زمرة** ، $a\in G$ **ولتكن** $H_a=\{x\in G : a*x=x*a\}$. برهن على ان $(H_a,*)$ زمرة جزئية **من الزمرة** $(G,*)$.

5.5 **لتكن** $(G,*)$ زمرة ابدالية ، ولتكن $H=\{x^n : x\in G, n\in\mathbb{Z}^+\}$. برهن على ان $(H,*)$ زمرة جزئية من **الزمرة** $(G,*)$

6.5 ليكن $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&2&1&3&6&5\end{pmatrix}\in S_6$. **جد عناصر** (f)

7.5 **لتكن كل من** $(H,*)$ ، $(K,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$. برهن على ان $(H*K,*)$ **زمرة** جزئية من $(G,*)$ **إذا وفقط إذا كان** $H*K=K*H$

.

6. الزمر الجزئية السوية Normal Subgroups

تعريف(1.6)

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وليكن $a \in G$. المجموعة $a*H=\{a*h : h \in H\}$ تسمى مجموعة مشاركة يسرى (Left Coset) إلى H في G والعنصر a يسمى ممثل المجموعة $a*H$ وكذلك المجموعة $H*a=\{h*a : h \in H\}$

تسمى مجموعة مشاركة يمنى (Right Coset).

مثال(2.6)

لتكن $H=\{0,4,8\}$ فان $(H,+_{12})$ زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $(Z_{12},+_{12})$ معيار 12 .

$$0+_{12}H=\{0+0,0+4,0+8\}=\{0,4,8\}=H, \quad H+_{12}0=\{0+0,4+0,8+0\}=\{0,4,8\}=H$$

$$1+_{12}H=\{1+0,1+4,1+8\}=\{1,5,9\}, \quad H+_{12}1=\{0+1,4+1,8+1\}=\{1,5,9\}$$

$$2+_{12}H=\{2+0,2+4,2+8\}=\{2,6,10\}, \quad H+_{12}2=\{0+2,4+2,8+2\}=\{2,6,10\}$$

$$3+_{12}H=\{3+0,3+4,3+8\}=\{3,7,11\}, \quad H+_{12}3=\{0+3,4+3,8+3\}=\{3,7,11\}$$

$$4+_{12}H=\{4+0,4+4,4+8\}=\{4,8,0\}=H, \quad H+_{12}4=\{0+4,4+4,8+4\}=\{4,8,0\}=H$$

$$5+_{12}H=\{5+0,5+4,5+8\}=\{5,9,1\}=1+_{12}H, \quad H+_{12}5=\{0+5,4+5,8+5\}=\{5,9,1\}=1+_{12}H$$

$$6+_{12}H=\{6+0,6+4,6+8\}=\{6,10,2\}=2+_{12}H, \quad H+_{12}6=\{0+6,4+6,8+6\}=\{6,10,2\}=2+_{12}H$$

$$7+_{12}H=\{7+0,7+4,7+8\}=\{7,11,3\}=3+_{12}H, \quad H+_{12}7=\{0+7,4+7,8+7\}=\{7,11,3\}=3+_{12}H$$

$$8+_{12}H=\{8+0,8+4,8+8\}=\{8,0,4\}=H, \quad H+_{12}8=\{0+8,4+8,8+8\}=\{8,0,4\}=H$$

$$9+_{12}H=\{9+0,9+4,9+8\}=\{9,1,5\}=H, \quad H+_{12}9=\{0+9,4+9,8+9\}=\{9,1,5\}=3+_{12}H$$

$$10+_{12}H=\{10+0,10+4,10+8\}=\{10,2,6\}=2+_{12}H, \quad H+_{12}10=\{0+10,4+10,8+10\}=\{10,2,6\}=2+_{12}H$$

$$11+_{12}H=\{11+0,11+4,11+8\}=\{11,3,7\}=3+_{12}H, \quad H+_{12}11=\{0+11,4+11,8+11\}=\{11,3,7\}=3+_{12}H$$

وعليه

$$1+_{12}H=5+_{12}H=9+_{12}H=\{1,5,9\} \text{ ، } 0+_{12}H=4+_{12}H=8+_{12}H=H=\{0,4,8\}$$

$$3+_{12}H=7+_{12}H=11+_{12}H=\{3,7,11\} \text{ ، } 2+_{12}H=6+_{12}H=10+_{12}H=\{2,6,10\}$$

ملاحظة

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وليكن e يمثل العنصر المحايد للزمرة $(G,*)$ فان

(1) $H=e*H=H*e$ وهذا يعني ان H مجموعة مشاركة يسرى ويمنى

(2) $a \in a*H$ لان $a=a*e$

(3) إذا كانت الزمرة $(G,*)$ ابدالية فان $a*H=H*a$

(4) كل من $(a*H,*),(H*a,*)$ ليس بالضرورة أن تكون زمرة جزئية

مبرهنة(3.6)

لتكن $(H,*)$ زمرة من الزمرة $(G,*)$، فانه يوجد تقابل بين عناصر H وعناصر أية مجموعة مشاركة.

البرهان :

ليكن $a \in G$. **نعرف الدالة** $f : H \to a*H$ بالصيغة $f(h)=a*h$. يجب ان نبرهن **ان الدالة** f تقابلية .

ليكن $h_1,h_2 \in H$ بحيث ان $f(h_1)=f(h_2) \Leftarrow a*h_1=a*h_2 \Leftarrow h_1=h_2 \Leftarrow$ **الدالة** f متباينة

ليكن $x \in a*H \Leftarrow$ يوجد $h \in H$ بحيث ان $x=a*h$

ولكن $f(h)=a*h \Leftarrow f(h)=x \Leftarrow$ **الدالة** f شاملة.

ملاحظة

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$. **إذا كانت** $(G,*)$ منتهية ، يمكن ان نستنتج ان أي مجموعتين مشاركتين يسرى للمجموعة H لهما نفس العدد من العناصر، أي ان $0(a*H)=0(b*H)=H$.

مبرهنة(4.6)

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وليكن $a,b \in G$.

(1) $a*H=H$ **أذا وفقط أذا كان** $a \in H$

(2) $a*H=b*H$ **أذا وفقط أذا كان** $a^{-1}*b \in H$

(3) **إما** $a*H=b*H$ **أو** $(a*H)\cap(b*H)=\emptyset$

البرهان :

(1) **نفرض** $a*H=H$

بما ان $e \in H \Leftarrow a*e \in H$ ، **ولكن** $a=a*e \Leftarrow a \in a*H$

بما ان $a*H=H \Leftarrow a \in H$

الاتجاه الأخر : نفرض $a \in H$

ليكن $x \in a*H \Leftarrow$ يوجد $h \in H$ بحيث ان $x=a*h$

بما ان $a \in H \Leftarrow a*h \in H \Leftarrow x \in H \Leftarrow a*H \subseteq H$

ليكن $y \in H$

بما ان $a \in H \Leftarrow a^{-1} \in H$ ، اصبح لدينا $a^{-1},y \in H \Leftarrow a^{-1}*y \in H$

$\Leftarrow a*(a^{-1}*y) \in a*H$

بما ان $y=e*y=(a*a^{-1})*y=a*(a^{-1}*y) \Leftarrow y \in a*H \Leftarrow a*H \subseteq H$

$\Leftarrow a*H=H$

(2) **نفرض** $a*H=b*H$

ليكن $x \in a*H \Leftarrow$ يوجد $h_1 \in H$ بحيث ان $x=a*h_1$

بما ان $a*H=b*H \Leftarrow x \in b*H \Leftarrow$ يوجد $h_2 \in H$ بحيث ان $x=b*h_2$

$\Leftarrow a*h_1=b*h_2 \Leftarrow a^{-1}*b=h_1*h_2^{-1}$

بما ان $h_1,h_2^{-1} \in H \Leftarrow h_1*h_2^{-1} \in H \Leftarrow a^{-1}*b \in H$

الاتجاه الأخر : نفرض $a^{-1}*b \in H$

باستخدام (1) ، **نحصل على** $(a^{-1}*b)*H=H$

ليكن $x \in a*H \Leftarrow$ يوجد $h \in H$ بحيث ان $x=a*h \Leftarrow a^{-1}*x=h \Leftarrow a^{-1}*x \in H$

ولكن $(a^{-1}*b)*H=H \Leftarrow a^{-1}*x \in (a^{-1}*b)*H$

$\Leftarrow x \in b*H \Leftarrow a*H \subseteq b*H$

وبالمثل نبرهن $b*H \subseteq a*H \Leftarrow a*H=b*H$.

(3) نفرض $(a*H)\cap(b*H)\neq\phi$ $\Leftarrow$ يوجد $x\in(a*H)\cap(b*H)$

$\Leftarrow$ $x\in a*H,\ \ x\in b*H$

$\Leftarrow$ يوجد $h_1\in H$ بحيث ان $x=a*h_1$ وكذلك يوجد $h_2\in H$ بحيث ان $x=b*h_2$

$\Leftarrow$ $a*h_1=b*h_2$

$\Leftarrow$ $a^{-1}*b=h_1*h_2^{-1}$

بما ان $h_1,h_2^{-1}\in H$ $\Leftarrow$ $h_1*h_2^{-1}\in H$ $\Leftarrow$ $a^{-1}*b\in H$، باستخدام الفرع(2)، نحصل على $a*H=b*H$.

ملاحظة

عندما نتعامل مع المجموعات المشاركة اليمنى، فان الفرع (2) من المبرهنة أعلاه

يكون $H*a=H*b$ إذا وفقط إذا $a*b^{-1}\in H$

مبرهنة(5.6)

أذا كانت $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ فالمجموعات المشاركة اليسارية (اليمينية) إلى H في G تشكل تجزئة للمجموعة G.

البرهان :

لتكن $\mathcal{F}=\{a*H : a\in G\}$

بما ان $a*H\neq\phi$ لكل $a\in G$ وكذلك إذا كان $a*H, b*H\in\mathcal{F}$ بحيث ان $a*H\neq b*H$ فان $(a*H)\cap(b*H)=\phi$

بقي ان نبرهن $G=\bigcup_{a\in G}(a*H)$

بما ان $a*H\subseteq G$ لكل $a\in G$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{a\in G}(a*H)\subseteq G$

ليكن $a\in G$ $\Leftarrow$ $a\in a*H$ $\Leftarrow$ $a\in\bigcup_{a\in G}(a*H)$ $\Leftarrow$ $G\subseteq\bigcup_{a\in G}(a*H)$ $\Leftarrow$ $G=\bigcup_{a\in G}(a*H)$

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ تمثل تجزئة للمجموعة G.

مثال(6.6)

سبق وان بينا في المثال (2.6) ان إذا كانت $H=\{0,4,8\}$ فان $(H,+_{12})$ زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $(Z_{12},+_{12})$ معيار 12 . وان

$0+_{12}H=4+_{12}H=8+_{12}H=H=\{0,4,8\}$ ، $1+_{12}H=5+_{12}H=9+_{12}H=\{1,5,9\}$

$2+_{12}H=6+_{12}H=10+_{12}H=\{2,6,10\}$ ، $3+_{12}H=7+_{12}H=11+_{12}H=\{3,7,11\}$

وعليه $\mathcal{F}=\{a*H : a\in G\}=\{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2,6,10\},\{3,7,11\}\}$

ملاحظة

لتكن $(G,*)$ زمرة منتهية رتبها n. ولتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ رتبتها k. نستطيع أن نحلل المجموعة G إلى اتحاد عد منته من المجموعات المشاركة اليسارية إلى H والمتنافية فيما بينها.

$G=(a_1*H)\cup(a_2*H)\cup\cdots\cup(a_r*H)$

العدد r للمجموعات المشاركة اليسرى المختلفة الظاهرة في هذا التحليل يسمى دليل (Index) H في G. بما أن كل مجموعة مشاركة في التحليل أعلاه لها k من العناصرفان المجموعة Gنفسها يجب أن تمتلك $r\cdot k$ من العناصر .وهكذا

$n=r\cdot k$ أو $0(G)=(Index\ \ H)\times 0(H)$

سوف نرمز لدليل H في G بالرمز $[G:H]$ وعليه $o(G)=[G:H]o(H)$ وبصورة خاصة $o(G)=[G:e]$

مبرهنة(7.6) مبرهنة لاكرانج (Lagrange theorem)

رتبة ودليل أية زمرة جزئية لزمرة منتهية يقسمان رتبة الزمرة.

البرهان :

لتكن $(G,*)$ زمرة منتهية رتبها n **.ولتكن** $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ رتبتها k .

$$G=(a_1*H)\cup(a_2*H)\cup\cdots\cup(a_r*H)$$

حيث r يمثل عدد المشاركات اليسرى المتنافية للمجموعة H **في** G

$$0(G)=0((a_1*H)\cup(a_2*H)\cup\cdots\cup(a_r*H))$$

بما ان $(a_i*H)\cap(a_j*H)=\emptyset$ **لكل** $i\neq j$

$$0(G)=0(a_1*H)+0(a_2*H)+\cdots+0(a_r*H)$$

بما ان $0(a_i*H)=0(H)$ **لكل** $i=1,2,\cdots,r$

$\Leftarrow\quad 0(G)=0(H)+0(H)+\cdots+0(H)=r\times 0(H)$

ولكن $0(H)=k \quad\Leftarrow\quad 0(G)=r\times k \Leftarrow$ **كل من** r,k يقسمان رتبة الزمرة $(G,*)$

نتيجة (8.6)

أذا كانت $(G,*)$ زمرة منتهية ذات رتبة n. فان رتبة أي عنصر هي عامل إلى n **بالإضافة إلى ذلك** $a^n=e$.

البرهان :

ليكن $a\in G$ رتبته $k \;\Leftarrow\; a^k=e$

$\Leftarrow$ $((a),*)$ زمرة دائرية مولدة بواسطة العنصر a رتبتها k ، **أي ان** $0((a))=k$

باستخدام مبرهنة لاكرانج ، يوجد $r\in\mathbb{Z}^+$ بحيث ان $n=r\times k \;\Leftarrow\; k$ **عامل إلى** n

وكذلك $a^n=a^{r\times k}=(a^k)^r=e^r=e$

مبرهنة (9.6)

أذا كانت $(G,*)$ زمرة منتهية ذات رتبة قابلة للتحليل **.فان** $(G,*)$ تمتلك زمرة جزئية غير تافهة

.

البرهان :

إذا لم تكن الزمرة $(G,*)$ دائرية ، فان أي عنصر $a\in G$ ، $a\neq e$ يولد زمرة جزئية دائرية غير تافه $((a),*)$

أما إذا كانت الزمرة $(G,*)$ دائرية ، نفرض $G=(a)$ حيث المولد a له رتبة nm ، $(n,m\neq 1)$

$\Leftarrow\quad a^{nm}=e \quad\Leftarrow\quad (a^n)^m=e$ بينما $(a^n)^{m'}\neq e$ **ل** $0<m'<m$

$\Leftarrow\quad ((a^n),*)$ هي زمرة جزئية دائرية غير تافه من الزمرة $(G,*)$ رتبتها m .

نتيجة (10.6)

كل زمرة $(G,*)$ **ذات رتبة** أولية تكون دائرية.

البرهان :

ليكن $a\in G$ ، $a\neq e \;\Leftarrow\; ((a),*)$ هي زمرة جزئية دائرية من الزمرة $(G,*)$ **مولدة بواسطة** a

.

باستخدام مبرهنة لاكرانج $0((a))$ يقسم $0(G)$

ولكن $0(G)$ **عدد اولي وان** (a) **تحتوي على أكثر من عنصر** $\Leftarrow\; 0((a))=0(G)$ ،

$\Leftarrow\quad (G,*)=((a),*)$.

ملاحظة

سبق وان برهنا في المبرهنة (9.2) **ان** " كل زمرة غير أبدالية لها على الأقل ستة عناصر" **ومن** الممكن أعادة برهان هذه الحقيقة بأسلوب أخر كالأتي :

لتكن $(G,*)$ زمرة غير ابدالية

(1) **إذا كان** $0(G)=2$ **أو** $0(G)=3$ **أو** $0(G)=5$ ، **فان** $0(G)$ **عدد اولي** $\Leftarrow$ $(G,*)$ دائرية

ولكن كل زمرة دائرية تكون ابدالية $\Leftarrow$ $(G,*)$ زمرة ابدالية وهذا تناقض

(2) **إذا كان** $0(G)=4$ ، باستخدام مبرهنة لاكرانج ان كل عنصر من G يختلف عن العنصر المحايد رتبته 2 **أو** 4

إذا كان لأحدهم رتبته 4 ، **فان** $(G,*)$ زمرة دائرية رتبتها 4 ولهذا تكون تبديلية ، وهذا تناقض

من جهة أخرى ، الزمرة التي كل عنصر منها هدا المحايد له رتبه 2 يجب ان تكون ابدالية، وهذا تناقض أيضا

ومما تقدم نستنتج على ان كل زمرة غير أبدالية لها على الأقل ستة عناصر

ملاحظة

سبق وان تطرقنا إلى مبرهنة **لاكرانج** (Lagrange theorem) " رتبة ودليل أية زمرة جزئية لزمرة منتهية يقسمان رتبة الزمرة " **بعبارة أخرى إذا كانت** $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة المنتهية $(G,*)$ **فان كل من** $0(H)$ ، $[G:H]$ يقسم $0(G)$. ومن جهة أخري فان معكوس هذه المبرهنة غير صحيح دائما ، أي ان إذا كان العدد m يقسم رتبة الزمرة $(G,*)$فانه ليس **بالضرورة ان تحتوي** $(G,*)$ **على** زمرة جزئية رتبتها m والمثال التالي يوضح ذلك

مثال(11.6)

الزمرة $(A_4,\circ)$ حيث A_4 **تمثل مجموعة** التباديل الزوجية في S_4 تكون رتبتها 12 **لان**

$$A_4=\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\}$$

تحتوي على زمر جزئية رتبتها 2، 3، 4 ولكنها لا تحتوي زمرة جزئية رتبتها 6 **بالرغم من** 6 **تقسم** 12 .

تعريف (12.6)

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ ،يقال عن $(H,*)$ بأنها سوية (Normal)**في** $(G,*)$ **أذا كان** $a*H=H*a$ **لكل** $a\in G$.

يقال عن الزمرة $(G,*)$ بأنها بسيط (Simple) **أذا كانت تمتلك فقط الزمرة** الجزئية التافهة والتي هي $(G,*),(\{e\},*)$.

ملاحظة

كل زمرة جزئية من زمرة ابدالية تكون سوية .

مثال(13.6)

لتكن $H=\{0,3,6,9,12\}$ **فان** $(H,+_{15})$ زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $(Z_{15},+_{15})$ معيار 15 .

$$0+_{15}H=\{0,3,6,9,12\}=H,\quad H+_{15}0=\{0,3,6,9,12\}=H$$

$$1+_{15}H=\{1,4,7,10,13\},\quad H+_{15}1=\{1,4,7,10,13\}$$

$$2+_{15}H=\{2,5,8,11,14\},\quad H+_{15}2=\{2,5,8,11,14\}$$

$3 +_{15} H = \{3,6,9,12,0\}, \quad H +_{15} 0 = \{3,6,9,12,0\}$
$4 +_{15} H = \{4,7,10,13,1\}, \quad H +_{15} 4 = \{4,7,10,13,1\}$
$5 +_{15} H = \{5,8,11,14,2\}, \quad H +_{15} 5 = \{5,8,11,14,2\}$
$6 +_{15} H = \{6,9,12,0,3\}, \quad H +_{15} 6 = \{6,9,12,0,3\}$
$7 +_{15} H = \{7,10,13,1,4\}, \quad H +_{15} 7 = \{7,10,13,1,4\}$
$8 +_{15} H = \{8,11,14,2,5\}, \quad H +_{15} 8 = \{8,11,14,2,5\}$
$9 +_{15} H = \{9,12,0,3,6\}, \quad H +_{15} 9 = \{9,12,0,3,6\}$
$10 +_{15} H = \{10,13,1,4,7\}, \quad H +_{15} 10 = \{10,13,1,4,7\}$
$11 +_{15} H = \{11,14,2,5,8\}, \quad H +_{15} 11 = \{11,14,2,5,8\}$
$12 +_{15} H = \{12,0,3,6,9\}, \quad H +_{15} 12 = \{12,0,3,6,9\}$
$13 +_{15} H = \{13,1,4,7,10\}, \quad H +_{15} 13 = \{13,1,4,7,10\}$
$14 +_{15} H = \{14,2,5,8,11\}, \quad H +_{15} 14 = \{14,2,5,8,11\}$

وعليه $a * H = H * a$ **لكل** $a \in G$ $\Leftarrow$ $(H, +_{15})$ **زمرة جزئية** سوية .

مبرهنة(14.6)

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ **فان** $(H,*)$ تكون سوية أذا وفقط أذا **كان** $a * H * a^{-1} \subseteq H$ **لكل** $a \in G$.

البرهان :

نفرض الزمرة الجزئية $(H,*)$ سوية

ليكن $x \in a * H * a^{-1}$ حيث ان $a \in G$ $\Leftarrow$ $x = a * h * a^{-1}$ حيث ان $h \in H$

بما ان $a * H = H * a$ **لكل** $a \in G$ $\Leftarrow$ يوجد $h' \in H$ بحيث ان $a * h = h' * a$

$\Leftarrow$ $x = a * h * a^{-1} = h' \in H$ $\Leftarrow$ $a * H * a^{-1} \subseteq H$

الاتجاه الأخر : نفرض ان $a * H * a^{-1} \subseteq H$ **لكل** $a \in G$

ليكن $x \in a * H$ $\Leftarrow$ $x = a * h$ حيث ان $h \in H$

$\Leftarrow$ $x * a^{-1} = a * h * a^{-1} \in a * H * a^{-1}$

بما ان $a * H * a^{-1} \subseteq H$ $\Leftarrow$ $x * a^{-1} \in H$ $\Leftarrow$ $x \in H * a$ $\Leftarrow$ $a * H \subseteq H * a$

وبالمثل ان نبرهن $H * a \subseteq a * H$ $\Leftarrow$ $a * H = H * a$ $\Leftarrow$ **الزمرة الجزئية** $(H,*)$ سوية

نتيجة (15.6)

$(Cent(G), *)$ زمرة جزئية سوية لأي زمرة $(G,*)$

البرهان :

لتكن $(G,*)$ زمرة ، سبق وان برهنا $(Cent(G), *)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ **(راجع** مبرهنة 8.5)

ليكن $x \in a * Cent(G) * a^{-1}$ $\Leftarrow$ $x = a * y * a^{-1}$ **حيث** $y \in Cent(G)$

$\Leftarrow$ $a * y = y * a$ $\Leftarrow$ $a * y * a^{-1} = y$ $\Leftarrow$ $x = y$ $\Leftarrow$ $x \in Cent(G)$

$\Leftarrow$ $x \in a * Cent(G) * a^{-1} \subseteq Cent(G)$ $\Leftarrow$ $(Cent(G), *)$

مبرهنة(16.6)

لتكن $(H,*)$زمرة جزئية سوية **من الزمرة** $(G,*)$ **ولتكن** G/H تمثل المجموعة التي عناصرها جميع المشاركات اليسرى

إلى H في G، أي أن $G/H=\{a*H : a\in G\}$. نعرف $\otimes$ على G/H بالصيغة

$$(a*H)\otimes(b*H)=(a*b)*H$$

لكل $a*H, b*H\in G/H$ فان $(G/H,\otimes)$ زمرة وتسمى زمرة القسمة (Quotient Group)

البرهان :

(1) يجب ان نبرهن $\otimes$ معرفة تعريفا حسنا

ليكن $a*H=a'*H,\ \ b*H=b'*H \ \Leftarrow\ a^{-1}*a'\in H,\ \ b^{-1}*b'\in H$

ولكن $(a*b)^{-1}*(a'*b')=(b^{-1}*a^{-1})*(a'*b')=b^{-1}*(a^{-1}*a')*b'=(b^{-1}*(a^{-1}*a')*b)*(b^{-1}*b')$

بما ان $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$ $\Leftarrow\ b^{-1}*H*(b^{-1})^{-1}\subseteq H$

$\Leftarrow\ (a*b)^{-1}*(a'*b')\in H \ \Leftarrow\ (a*b)*H=(a'*b')*H$ وعليه فان $\otimes$ معرفة تعريفا حسنا

(2) يجب ان نبرهن $\otimes$ تجميعية : ليكن $x,y,z\in G/H$

$\Leftarrow\ x=a*H,\ \ y=b*H,\ \ z=c*H$ حيث ان $a,b,c\in G$

$$x\otimes(y\otimes z)=(a*H)*((b*H)*(c*H))=(a*H)*((b*c)*H)=(a*(b*c))*H=((a*b)*c)*H)$$
$$=((a*b)*H)\otimes(c*H)=((a*H)\otimes(b*H))\otimes(c*H)==(x\otimes y)\otimes z$$

وعليه العلمية $\otimes$ تجميعية

(3) العنصر المحايد للعملية $\otimes$ هو $H=e*H$

ليكن $x\in G/H \ \Leftarrow\ x=a*H$ حيث $a\in G$

$$x\otimes H=(a*H)\otimes(e*H)=(a*e)*H=a*H=x,\quad H\otimes x=(e*H)\otimes(a*H)=(e*a)*H=a*H=x$$

(4) يجب ان نبرهن $a^{-1}*H$ هو العنصر النظير للعنصر $a*H$ حيث $a\in G$

$$(a*H)\otimes(a^{-1}*H)=(a*a^{-})*H=e*H=H,\quad (a^{-1}*H)\otimes(a*H)=(a^{-1}*a)*H=e*H=H$$

$\Leftarrow\ (G/H,\otimes)$ زمرة .

مثال(17.6)

تأمل زمرة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z},+)$ ، وليكن $n\in\mathbb{Z}^{+}$ ، فان $((n),+)$ زمرة دوارة

بما ان $H=(n)=\{kn : k\in\mathbb{Z}\}=\{\cdots,-4n,-3n,-2n,-n,0,n,2n,3n,4n,\cdots\}$

$$a+(n)=\{a+kn : k\in\mathbb{Z}\}=[a]$$

$\Leftarrow\ (\mathbb{Z}/(n),\otimes)=(Z_n,+_n)$ ، وعليه إذا كان $x,y\in\mathbb{Z}/(n)$ فان

$x=a+(n)=\{a+kn : k\in\mathbb{Z}\}=[a]$ وكذلك $y=b+(n)=\{b+kn : k\in\mathbb{Z}\}=[b]$

$x\otimes y=(a+(n))\otimes(b+(n))=(a+b)+(n)=[a+b]$ أو مع تغيير بالترميز ان

$$[x]\otimes[y]=[a+b]$$

تعريف(18.6)

لتكن $(G,*)$ زمرة وليكن $a,b\in G$.المبادل (Commutator) للعنصرين a,b يرمز له بالرمز $[a,b]$ ويعرف بالصيغة

$$[a,b]=a*b*a^{-1}*b^{-1}$$

ومن التعريف مباشرة نستنتج أن

(1) $a*b=[a,b]*b*a$

(2) $a*b=b*a$ أذا وفقط أذا كان $[a,b]=e$

(3) $[a,b]^{-1}=[a,b]$

الزمرة الناتجة تعرف أما بالزمرة الجزئية المشتقة (Derived subgroup) **أو الزمرة** الجزئية المبادلة (Commutator subgroup) **إلى** $(G,*)$ وببساطة تمثل بالصيغة $([G,G],*)$ حيث

$$[G,G]=\{\prod[a_i,b_i],\quad a_i,b_i\in G\}$$

حيث $\prod$ يجب ان يبنى لتمثيل ضرب منته مكون من عامل واحد أو أكثر. **بعبارة أخرى**

إذا كان $x\in[G,G]$ **فان** $x=\prod_{i=1}^{k}[a_i,b_i],\quad a_i,b_i\in G$ ، **وعندما** $k=1$ **فان** $x=[a,b]$

مبرهنة (19.6)

$([G,G],*)$ هي زمرة جزئية سوية للزمرة $(G,*)$.

البرهان :

(1) يجب ان نبرهن $([G,G],*)$ هي زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

ليكن $x,y\in[G,G]$

(2) يجب ان نبرهن على ان $([G,G],*)$ سوية

ليكن $x\in[G,G],\quad a\in G$

$$a*x*a^{-1}=(a*x*a^{-1}*x^{-1})*x=[a,x]*x$$

بما ان $[a,x]*x$ هي ضرب منتهي من المبادلات $\Leftarrow$ $[a*x]*x\in[G,G]$ $\Leftarrow$ $a*x*a^{-1}\in[G,G]$

$\Leftarrow$ $a*[G,G]*a^{-1}\subseteq[G,G]$ $\Leftarrow$ $([G,G],*)$ هي زمرة جزئية سوية للزمرة $(G,*)$.

ملاحظة

لتكن $(G,*)$ زمرة، **زمرة القسمة** $(G/[G,G],\otimes)$ **تسمى زمرة قسمة المبادل** (Commutator Quotient Group)

مبرهنة (20.6)

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$. **فان زمرة القسمة** $(G/H,\otimes)$ تكون تبديليه أذا **وفقط أذا كان** $[G,G]\subseteq H$

البرهان :

نفرض زمرة القسمة $(G/H,\otimes)$ تبديلية

الاتجاه الأخر : نفرض ان $[G,G]\subseteq H$

ليكن $x,y\in G/H$ $\Leftarrow$ $x=a*H,\quad y=b*H$ **حيث** $a,b\in G$

$$x\otimes y=(a*H)*(b*H)=(a*b)*H,\quad y\otimes x=(b*H)*(a*H)=(b*a)*H$$

$$(a*b)^{-1}*(b*a)=b^{-1}*a^{-1}*b*a=[b^{-1},a^{-1}]\in[G,G]$$

بما ان $[G,G]\subseteq H$ $\Leftarrow$ $(a*b)^{-1}*(b*a)\in H$ $\Leftarrow$ $(a*b)*H=(b*a)*H$ $\Leftarrow$ $x\otimes y=y\otimes x$

$\Leftarrow$ $(G/H,\otimes)$ تبديلية .

نتيجة (21.6)

لأي زمرة $(G,*)$، **زمرة قسمة المبادل** $(G/[G,G],\otimes)$ تكون تبديليه .

تمارين(6)

1.6 لتكن $(G,*)$ زمرة رتبتها $2p$ حيث ان p عدد اولي . برهن ان كل زمرة جزئية فعلية من $(G,*)$ تكون دائرية

2.6 إذا كانت $(G,*)$ زمرة رتبتها 60. فهل توجد في $(G,*)$ زمرة جزئية رتبتها 24 ؟ مع ذكر السبب

3.6 لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية منتهية ربتها $2n$ والوحيدة من الزمرة $(G,*)$ التي رتبتها n . برهن على ان $(H,*)$

زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$

4.6 لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية دائرية سوية منتهية من الزمرة $(G,*)$ ولتكن $(K,*)$ زمرة جزئية فعلية من $(H,*)$.

برهن على ان $(K,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$

5.6 برهن على ان تقاطع زمرتين جزئيتين سويتين هو زمرة جزئية سوية.

6.6 لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة الدائرية $(G,*)$. برهن على ان $(G/H,\otimes)$ زمرة دائرية

7.6 لتكن $(G,*)$ زمرة ابدالية ولتكن H تمثل مجموعة العناصر في G التي رتبتها منتهية .
برهن على ان

(1) $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

(2) لا يوجد عنصر في الزمرة $(G/H,\otimes)$ رتبتها منتهية عدا العنصر المحايد.

8.6 لأي زمرة $(G,*)$ صف زمرتي القسمة $(G/\{e\},\otimes)$ ، $(G/G,\otimes)$

9.6 برهن على ان الزمرة $(G,*)$ تبديلية إذا وفقط إذا كان $[G,G]=\{e\}$

10.6 برهن انه إذا كان زمرة القسمة $(G/Cent(G),\otimes)$ دوارة فلن تكون زمرة $(G,*)$ تبديلية

7. التشاكل الزمري Isomorphic of Groups

تعريف(1.7)

لتكن كل من $(G,*)$ ، $(G',\#)$ زمرة . يقال عن الدالة $f:G\to G'$ بأنها تماثل (Homomorphism) أذا كان

$$f(a*b)=f(a)\#f(b)$$

لكل $a,b\in G$. يقال للتماثل بأنه متباين أذا كانت الدالة f متباينة، وشامل عندما تكون الدالة شاملة .أما أذا كانت الدالة f تقابلية(متباينة وشاملة) ففي هذه الحالة يقال عن الدالة f بأنها تشاكل(Isomorphism).

ويقال عن الزمرتين $(G,*),(G',\#)$ بأنهما متشاكلتين (Isomorphic) إذا وجد تشاكل بينهما. ويرمز لهما بالرمز $(G,*)\cong(G',\#)$. سوف نرمز لمجموعة التماثلات من الزمرة $(G,*)$ إلى الزمرة $(G',\#)$ بالرمز $Hom(G,G')$ ، أي ان $Hom(G,G')=\{f:G\to G',\ \ f$ تماثل $\}$

وفي حالة $(G',\#)=(G,*)$ نكتب $Hom(G)$ بدلا من $Hom(G,G)$ ،أي أن $Hom(G)$ تمثل مجموعة كل التماثلات الداخلية (Endomorphism) من الزمرة $(G,*)$ إلى نفسها وغالبا ما نكتب الرمز $End(G)$.

وكلا من الرمزين لها نفس المعنى ،أي أن $End(G)=Hom(G)$. ويرمز أيضا لمجموعة كل التشاكلات على الزمرة $(G,*)$ بالرمز $A(G)$ والتي تسمى بالتشاكلات الذاتية (Automorphism).

مثال(2.7)

(1) لتكن $(G,*)$. الدالة $f:G\to G$ المعرفة بالصيغة $f(a)=a$ لكل $a\in G$ (أي ان f دالة ذاتية)، تكون تشاكل لان

الدالة الذاتية دالة تقابلية وان $f(a*b)=a*b=f(a)*f(b)$ لكل $a,b\in G$.

(2) لتكن كل من $(G,*)$ ، $(G',\#)$ زمرة عنصراهما المحايدان هما e ، e' على التوالي . الدالة $f:G\to G'$ المعرفة

بالصيغة $f(a)=e'$ لكل $a\in G$ تكون تماثل لان $f(a*b)=e'=e'*e'=f(a)*f(b)$ لكل $a,b\in G$

(يقال لهذا النوع من التماثلات بالتماثل التافه)

(3)الدالة f المعرفة من الزمرة $(\mathbb{R},+)$ إلى الزمرة $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ بالصيغة $f(x)=3^x$ لكل $x\in\mathbb{R}$ تكون تماثل لان

$f(x+y)=3^{x+y}=3^x\cdot 3^y=f(x)\cdot f(y)$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$.

ان هذا التماثل متباين لأنه إذا كان $f(x)=f(y)\ \Rightarrow\ 3^x=3^y\ \Rightarrow\ x=y$ ولكنه غير شامل لان $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}^+\neq\mathbb{R}$

(3) الدالة f المعرفة من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ إلى الزمرة $(Z_n,+_n)$ بالصيغة $f(a)=[a]$ لكل $a\in\mathbb{Z}$ تكون تماثل لان

$f(a+b)=[a+b]=[a]+_n[b]=f(a)+_n f(b)$ لكل $a,b\in\mathbb{Z}$.

(3) الدالة f المعرفة من الزمرة $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ إلى الزمرة $(\mathbb{R},+)$ بالصيغة $f(x)=\log x$ لكل $x\in\mathbb{R}^+$ تكون تماثل لان

$f(x\cdot y)=\log(x\cdot y)=\log x+\log y=f(x)+f(y)$ لكل $x,y\in\mathbb{R}^+$.

مبرهنة (3.7)

لتكن $(G,*)$ زمرة فان $(Hom(G),\circ)$ ، حيث $\circ$ تمثل تركيب الدوال ، تشكل شبه زمرة ذات عنصر محايد. وان $(A(G),\circ)$ تكون زمرة جزئية من الزمرة التناظرية $(SymG,\circ)$

البرهان :

(1) ليكن $f,g \in Hom(G)$

$(f\circ g)(a*b)=f(g(a*b))=f(g(a)*g(b))=f(g(a))*f(g(b))=(f\circ g)(a)*(f\circ g)(b)$

$\Leftarrow \quad f\circ g \in Hom(G)$

بما ان تركيب الدوال عملية تجميعية $\Leftarrow$ $(Hom(G),\circ)$ شبه زمرة وان الدالة الذاتية تمثل العنصر المحايد

(2) $(A(G),\circ)$ شبه زمرة ذات عنصر محايد (حسب فرع(1)). بقي لدينا ان نبرهن لكل عنصر له نظير

ليكن $f \in A(G)$ $\Leftarrow$ f دالة تقابلية $\Leftarrow$ f^{-1} دالة تقابلية

ليكن $a,b \in G$ $\Leftarrow$ يوجد $x,y \in G$ بحيث ان $f(x)=a,\ f(y)=b$

$f^{-1}(a*b)=f^{-1}(f(x)*f(y))=f^{-1}(f(x*y))=x*y=f^{-1}(a)*f^{-1}(b) \quad \Leftarrow \quad f^{-1}\in A(G)$

مبرهنة(4.7)

لتكن $f \in Hom(G,G')$

(1) $f(e)=e'$ حيث e يمثل العنصر المحايد للزمرة $(G,*)$ ، e' يمثل العنصر المحايد للزمرة $(G',\#)$.

(2) $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$ **لكل** $a\in G$.

(3) $f(a^n)=(f(a))^n$ **لكل** $a\in G$ **و** n عدد صحيح موجب.

(4) **أذا كانت** $(H,*)$ زمرة جزئية من **الزمرة** $(G,*)$ **فان** $(f(H),\#)$ تكون زمرة جزئية من **الزمرة** $(G',\#)$.

(5) **أذا كانت** $(H',\#)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G',\#)$**فان** $(f^{-1}(H'),*)$ تكون زمرة جزئية **من الزمرة** $(G,*)$.

(6) **أذا كانت** f **شاملة وكانت** $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$ **فان** $(f(H),\#)$ **تكون** زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G',\#)$.

(7) **أذا كانت** $(H',\#)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G',\#)$ **فان** $(f^{-1}(H'),*)$ تكون زمرة جزئية **من الزمرة** $(G,*)$.

البرهان :

(1) ليكن $a\in G$

بما ان $f(e)\#f(a)=f(e*a)=f(a)=f(a)\#e'$ **باستخدام قانون الاختصار في الزمرة** $(G',\#)$ **نحصل على**

$f(e)=e'$

(2) ليكن $a\in G$

$f(a)\#f(a^{-1})=f(a*a^{-1})=f(e)=e',\quad f(a^{-1})\#f(a)=f(a^{-1}*a)=f(e)=e'$

$\Leftarrow$ $f(a^{-1})$ هو نظير $f(a)$ ، **ولكن** $(f(a))^{-1}$ هو نظير $f(a)$ والنظير وحيد

$\Leftarrow \quad f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$

(4) **بما ان** $f(H)=\{f(h): h\in H\}$

ليكن $f(a),f(b)\in f(H)$ ، وهذا يعني بان $a,b\in H$

بما ان $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ $\Leftarrow$ $a*b^{-1}\in H$ $\Leftarrow$ $f(a*b^{-1})\in f(H)$

ولكن $f(a*b^{-1})=f(a)\#f(b^{-1})=f(a)\#(f(b))^{-1}$ $\Leftarrow$ $f(a)\#(f(b))^{-1}\in f(H)$

$\Leftarrow$ $(f(H),\#)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G',\#)$.

(5) **بما ان** $f^{-1}(H')=\{a\in G: f(a)\in H'\}$

ليكن $a,b\in f^{-1}(H') \Leftarrow f(a),f(b)\in H'$

بما ان $(H',\#)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G',\#) \Leftarrow f(a)*(f(b))^{-1}\in H'$

ولكن

$f(a)\#(f(b))^{-1}=f(a)\#f(b^{-1})=f(a*b^{-1}) \Leftarrow f(a*b^{-1})\in H' \Leftarrow a*b^{-1}\in f^{-1}(H')$

$\Leftarrow$ $(f^{-1}(H')),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

(6) بما ان $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*) \Leftarrow (f(H),\#)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G',\#)$.

ليكن $b\in G'$ ، بما ان الدالة f شاملة $\Leftarrow$ يوجد $a\in G$ بحيث ان $f(a)=b$. يجب ان نبرهن

$$b\#f(H)\#b^{-1}\subseteq f(H)$$

بما ان $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$ وان $a\in G \Leftarrow a*H*a^{-1}\subseteq H$

ليكن

$f(h)\in f(H) \Leftarrow a*h*a^{-1}\in H \Leftarrow f(a*h*a^{-1})\in f(H) \Leftarrow f(a)\#f(h)\#f(a^{-1})\in f(H)$

$\Leftarrow f(a)\#f(h)\#f(a^{-1})\in f(H) \Leftarrow f(a)\#f(h)\#(f(a))^{-1}\in f(H) \Leftarrow b\#f(h)\#b^{-1}\in f(H)$

$\Leftarrow b\#f(H)\#b^{-1}\subseteq f(H)$

(7) بما ان $(H',\#)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G',\#) \Leftarrow (f^{-1}(H')),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

ليكن $a\in G$. يجب ان نبرهن $a*f^{-1}(H')*a^{-1}\subseteq f^{-1}(H')$

بما ان بما ان $(H',\#)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G',\#)$ وان

$f(a)\in G' \Leftarrow f(a)\#H'\#(f(a))^{-1}\subseteq H'$

ليكن

$h\in f^{-1}(H')$

$\Leftarrow f(a)\#f(h)\#(f(a))^{-1}\in H' \Leftarrow f(a)\#f(h)\#f(a^{-1})\in H' \Leftarrow f(a*h*a^{-1})\in H'$

$\Leftarrow a*h*a^{-1}\in f^{-1}(H') \Leftarrow a*f^{-1}(H')*a^{-1}\subseteq f^{-1}(H')$

مثال (5.7)

برهن على ان لكل عدد حقيقي $r\neq 0$ ، يوجد بالضبط تماثل واحد فقط f من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ إلى الزمرة $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ فيه $f(1)=r$.

البرهان :

نعرف الدالة $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^*$ بالصيغة $f(x)=r^x$ لكل $x\in\mathbb{Z}$

(1) الدالة f تماثل : ليكن $x,y\in\mathbb{Z} \Leftarrow f(x+y)=r^{x+y}=r^x\cdot r^y=f(x)\cdot f(y)$

(2) $f(1)=r$: بما ان $f(x)=r^x \Leftarrow f(1)=r^1=r$

(3) الدالة f وحيدة : نفرض الدالة $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^*$ تماثل بحيث ان $g(1)=r$ ، يجب ان نبرهن $g=f$

ليكن $x\in\mathbb{Z}$

(أ) إذا كانت $x\in\mathbb{Z}^+$ ، فان

$$f(x)=r^x=(g(1))^x=g(1)\cdot g(1)\cdots g(1)=g(1+1+\cdots+1)=g(x)$$

(ب) إذا كانت $-x \in \mathbb{Z}^+$ ، فان

$$f(x) = f(-(-x)) = (f(-x))^{-1} = (g(-x))^{-1} = g(-(-x)) = g(x)$$

بما ان

$$f(0) = g(0) \Leftarrow f(0) = 1,\ g(0) = 1 \Leftarrow f(e) = g(e) = e' \Leftarrow e = 0,\ e' = 1$$

$\Leftarrow f(x) = g(x)$ لكل $x \in \mathbb{Z}$.

تعريف(6.7)

ليكن $f \in Hom(G, G')$. نواة(Kernel) الدالة f يرمز لها بالرمز $\ker(f)$ وتعرف بالصيغة

$$\ker(f) = \{a \in G : f(a) = e'\}$$

حيث e' يمثل العنصر المحايد للزمرة $(G', \#)$. أي ان $\ker(f) = f^{-1}(\{e'\}) = f^{-1}(e')$.

بما ان $f(e) = e' \Leftarrow e \in \ker(f) \Leftarrow \ker(f) \neq \varnothing$.

مبرهنة(7.7)

ليكن $f \in Hom(G, G')$

(1) $(\ker(f), *)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G, *)$. (2) $\ker(f) = \{e\}$ أذا وفقط أذا كانت f متباينة .

البرهان :

(1) بما ان $f(e) = e' \Leftarrow e \in \ker(f) \Leftarrow \ker(f) \neq \varnothing$

ليكن $a, b \in \ker(f) \Leftarrow f(a) = e',\ f(b) = e'$

$$\Leftarrow f(a * b^{-1}) = f(a) \# f(b^{-1}) = f(a) \# (f(b))^{-1} = e' \# e' = e' \Leftarrow a * b^{-1} \in \ker(f)$$

$\Leftarrow (\ker(f), *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

ليكن $a \in G$. يجب ان نبرهن على $\Leftarrow a * \ker(f) * a^{-1} \subseteq \ker(f)$

ليكن $b \in \ker(f) \Leftarrow f(b) = e'$

$$f(a * b * a^{-1}) = f(a) \# f(b) \# f(a^{-1}) = f(a) \# e' \# (f(a))^{-1} = f(a) \# (f(a))^{-1} = e'$$

$\Leftarrow a * b * a^{-1} \in \ker(f) \Leftarrow (\ker(f), *)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G, *)$

(2) نفرض $\ker(f) = \{e\}$

ليكن $a, b \in G$ بحيث ان $f(a) = f(b)$

$$\Leftarrow f(a) \# (f(b))^{-1} = e' \Leftarrow f(a) \# f(b^{-1}) = e' \Leftarrow f(a * b^{-1}) = e' \Leftarrow a * b^{-1} \in \ker(f)$$

ولكن $\ker(f) = \{e\} \Leftarrow a * b^{-1} = e \Leftarrow a = b \Leftarrow$ الدالة f متباينة

الاتجاه الأخر : نفرض الدالة f متباينة .

ليكن $a \in \ker(f) \Leftarrow f(a) = e'$ ولكن $f(e) = e' \Leftarrow f(a) = f(e)$

بما ان الدالة f متباينة $\Leftarrow a = e \Leftarrow \ker(f) = \{e\}$

مثال(8.7)

لتكن f دالة من الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ إلى الزمرة $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ معرفة بالصيغة $f(n) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{Z}_e \\ -1, & n \in \mathbb{Z}_0 \end{cases}$

ليكن $a, b \in \mathbb{Z}$

(1) إذا كانت $a, b \in \mathbb{Z}_e$ ، فان $a + b \in \mathbb{Z}_e$ ، $f(a) = 1,\ f(b) = 1$

$$f(a + b) = 1 = 1 \times 1 = f(a) \times f(b)$$

(2) إذا كانت $a\in\mathbb{Z}_e$ ، $b\in\mathbb{Z}_0$ فان $a+b\in\mathbb{Z}_0$ ، $f(a)=1,\ f(b)=-1$

$f(a+b)=-1=1\times(-1)=f(a)\times f(b)$

(3) إذا كانت إذا كانت $b\in\mathbb{Z}_e$ ، $a\in\mathbb{Z}_0$ فان $a+b\in\mathbb{Z}_0$ ، $f(a)=-1,\ f(b)=1$

$f(a+b)=-1=(-1)\times 1=f(a)\times f(b)$

(4) إذا كانت إذا كانت $a,b\in\mathbb{Z}_0$ ، فان $a+b\in\mathbb{Z}_e$ ، $f(a)=-1,\ f(b)=-1$

$f(a+b)=1=(-1)\times(-1)=f(a)\times f(b)$

$\Leftarrow$ f تماثل $\Leftarrow$ $\ker(f)=\{a\in\mathbb{Z}: f(a)=1\}=\mathbb{Z}_e$

مثال(9.7)

برهن على ان

(1) $(Z_4,+_4)\cong(G,\cdot)$ حيث ان $G=\{-1,1,-i,i\}$ (2) $(\mathbb{Z},+)\not\cong(\mathbb{Q}^*,\cdot)$

البرهان :

(1) **نعرف الدالة** $f:Z_4\to G$ بالصيغة $f(0)=1, f(1)=i, f(2)=-1,\ f(3)=-i$

من الواضح ان f **تشاكل ، أي ان الدالة** f تقابلية وتماثل .

(2) سنبرهن بطريقة التناقض

نفرض توجد دالة $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}^*$ **تشاكل ، أي ان الدالة** f تقابلية وتماثل

بما ان $-1\in\mathbb{Q}^*$ **وان الدالة** f **شاملة** $\Leftarrow$ يوجد $x\in\mathbb{Z}$ بحيث ان $f(x)=-1$

$f(2x)=f(x+x)=f(x)\times f(x)=(-1)\times(-1)=1$

بما ان $f(e)=e'$ $\Leftarrow$ $f(0)=1$ $\Leftarrow$ $f(2x)=f(0)$ ، **بما ان الدالة** f متباينة

$\Leftarrow$ $2x=0$ $\Leftarrow$ $x=0$

اصبح لدينا $f(0)=-1$, $f(0)=1$ وهذا يناقض كون الدالة f متباينة.

مبرهنة(10.7)

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$ **فان الدالة** $®:G\to G/H$ المعرفة بالصيغة $®(a)=a*H$ **لكل** $a\in G$ **تكون تماثل شامل وان** $\ker(®)=H$. **الدالة** ® تسمى بالدالة القانونية (Canonical Function) **أو الدالة الطبيعية** (Natural Function)

البرهان :

(1) ليكن $a,b\in G$ $\Leftarrow$ $®(a)=a*H,\ ®(b)=b*H$

$\Leftarrow$ $®(a*b)=(a*b)*H=(a*H)\otimes(b*H)=®(a)\otimes®(b)$ $\Leftarrow$ ® **تماثل**

(2) ليكن $x\in G/H$ $\Leftarrow$ يوجد $a\in G$ بحيث ان $x=a*H$ ، **لكن** $®(a)=a*H$

$\Leftarrow$ $®(a)=x$ $\Leftarrow$ ® **شاملة**

(3) $\ker(®)=\{a\in G:®(a)=e'=H\}=\{a\in G: a*H=H\}=\{a\in G: a=a*e^{-1}\in H\}=H$

نتيجة(11.7)

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$ ، فانه توجد زمرة $(G',\#)$ و $f\in Hom(G,G')$ بحيث **أن** $\ker(f)=H$.

البرهان :

نأخذ $(G',\#)=(G/H,\otimes)$ ، $f=®$ ، **أي ان** $f:G\to G/H$ المعرفة بالصيغة $f(a)=a*H$ **لكل** $a\in G$ **تكون تماثل شامل وان** $\ker(®)=H$.

ملاحظة

نلاحظ التماثل الطبيعي هو دالة شاملة ولكن ليس على العموم متباين لأنه إذا كان $a,b\in G$ بحيث ان $a*b^{-1}\in G$

فان $\Leftarrow$ $a*H=b*H$ $\Leftarrow$ $®(a)=®(b)$

مبرهنة(12.7)

(1) كل زمرة دائرية منتهية ذات رتبة n **تتشاكل مع الزمرة** $(Z_n,+_n)$.

(2) كل زمرة دائرية غير منتهية تتشاكل مع $(\mathbb{Z},+)$.

(3) كل زمرتين دائريتين من نفس الرتبة متشاكلتين .

البرهان :

لتكن $((a),*)$ زمرة دائرية مولدها a

(1) **بما ان الزمرة** $((a),*)$ منتهية ذات رتبة n $\Leftarrow$ $(a)=\{e,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$. **نعرف الدالة** $f:(a)\to Z_n$ بالصيغة

$f(a^k)=[k]$ ، $k=0,1,\cdots,n-1$. **وبسهولة** يمكن اثبات الدالة f **تشاكل (أي ان الدالة** تماثل وتقابلية)

(2) **بما ان الزمرة** $((a),*)$ غير منتهية $\Leftarrow$ $(a)=\{a^n : n\in\mathbb{Z}\}$. **نعرف الدالة** $f:(a)\to\mathbb{Z}$ بالصيغة

$f(a^k)=k$ ، $k\in\mathbb{Z}$. وبسهولة يمكن اثبات الدالة f **تشاكل** (أي ان الدالة تماثل وتقابلية)

مبرهنة(13.7)

لتكن $(G,*)$ وليكن $a\in G$.**عرف الدالة** $f_a:G\to G$ بالصيغة $f_a(x)=a*x$ **لكل** $x\in G$ **فان**

(1) **الدالة** f_a تقابلية لكل $a\in G$.

(2) $f_a\circ f_b=f_{a*b}$ **لكل** $a,b\in G$ حيث $\circ$ تمثل تركيب الدوال

(3) $(F_G,\circ)$ تشكل زمرة حيث $F_G=\{f_a : a\in G\}$.

البرهان:

(1)

(ا) **الدالة** f_a متباينة : ليكن $x,y\in G$ بحيث ان $f_a(x)=f_a(y)$

$\Leftarrow$ $a*x=a*y$ $\Leftarrow$ $x=y$

(ب) **الدالة** f_a **شاملة** : ليكن $y\in G$ $\Leftarrow$ $a^{-1}*y\in G$ ، **نضع** $x=a^{-1}*y$ $\Leftarrow$ $x\in G$ **وان**

$f_a(x)=a*x=a*(a^{-1}*y)=(a*a^{-1})*y=e*y=y$

(2) ليكن $x\in G$

$(f_a\circ f_b)(x)=f_a(f_b(x))=f_a(b*x)=a*(b*x)=(a*b)*x=f_{a*b}(x)$

(3) ليكن $f_a,f_b\in F_G$ $\Leftarrow$ $a,b\in G$ $\Leftarrow$ $a*b\in G$ $\Leftarrow$ $f_{a*b}\in F_G$.

بما ان $f_a\circ f_b=f_{a*b}$ $\Leftarrow$ $f_a\circ f_b\in F_G$

(ا) **ليكن** $f_a,f_b,f_c\in F_G$ $\Leftarrow$ $f_a\circ(f_b\circ f_c)=(f_a\circ f_b)\circ f_c$ لان تركيب الدوال عملية تجميعية

(ب) **بما ان** $e\in G$ $\Leftarrow$ $f_e\in F_G$ **وان** $f_e\circ f_a=f_{e*a}=f_a$ ، $f_a\circ f_e=f_{a*e}=f_a$ $\Leftarrow$ f_e عنصر محايد

(ج) ليكن $f_a\in F_G$ $\Leftarrow$ $a\in G$ $\Leftarrow$ $a^{-1}\in G$ $\Leftarrow$ $f_{a^{-1}}\in F_G$

$\Leftarrow$ $f_{a^{-1}}\circ f_a=f_{a^{-1}*a}=f_e$ ، $f_a\circ f_{a^{-1}}=f_{a*a^{-1}}=f_e$ $\Leftarrow$ $f_{a^{-1}}$ نظير العنصر f_a

$\Leftarrow$ $(F_G,\circ)$ **زمرة**

مبرهنة(14.7) مبرهنة كيلي (Cayley Theorem)

أذا كانت $(G,*)$ **زمرة فان** $(G,*)\cong(F_G,\circ)$

البرهان:

نعرف الدالة $f:G\to F_G$ بالصيغة $f(a)=f_a$ **لكل** $a\in G$

من الواضح ان الدالة f **شاملة** . بقي ان نبرهن

(1) **الدالة** f **تماثل** : ليكن $a,b\in G$

$$f(a*b)=f_{a*b}=f_a\circ f_b=f(a)\circ f(b)$$

(2) **الدالة** f متباينة : ليكن $a,b\in G$ بحيث ان $f(a)=f(b)$

$$\Rightarrow\quad f_a=f_b\quad\Rightarrow\quad f_a(x)=f_b(x)\ \text{لكل}\ x\in G\quad\Rightarrow\quad a*x=b*x\quad\Rightarrow\quad a=b$$

ملاحظة

لتوضيح هذه المبرهنة ، تأمل الزمرة $(\mathbb{R},+)$ دالة الضرب اليسارية بالنسبة للعنصر $a\in\mathbb{R}$ وهي الدالة f_a المعرف بالصيغة $f_a(x)=a+x$ **لكل** $x\in\mathbb{R}$ ، وهذا يعني الدالة f_a لها التأثير في **نقل أو إزاحة العناصر بمقدار** a . مبرهنة كيلي تؤكد ان الزمرة $(\mathbb{R},+)$ **والزمرة** $(F_G,\circ)$ **لانتقالات خط الأعداد** الحقيقية غير متمازيين بمقدار مايخص صفاتهما الجبرية.

المبرهنات الأساسية The Fundamental Theorems

مبرهنة(15.7) مبرهنة التحليل (Factor Theorem)

لتكن $f\in Hom(G,G')$ حيث f **شاملة . ولتكن** $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$ بحيث **أن** $H\subseteq\ker(f)$. فانه يوجد تماثل وحيد $g:G/H\to G'$ بحيث أن $f=g\circ®$ حيث ® **تمثل الدالة** القانونية .

البرهان :

نعرف الدالة $g:G/H\to G'$ **على النحو** $g(a*H)=f(a)$ **لكل** $a\in G$

(1) يجب ان نبرهن ان g معرفة تعريفا حسنا :

نفرض $a*H=b*H$ حيث $a,b\in G\quad\Rightarrow\quad a^{-1}*b\in H$

بما ان $H\subseteq\ker(f)\quad\Rightarrow\quad a^{-1}*b\in\ker(f)\quad\Rightarrow\quad f(a^{-1}*b)=e'$

$$f(b)=f(a*a^{-1}*b)=f(a)\#f(a^{-1}*b)=f(a)\#e'=f(a)$$

(2) يجب ان نبرهن g **تماثل**

ليكن $a,b\in G$

$$g((a*H)\otimes(b*H))=g((a*b)*H)=f(a*b)=f(a)\#f(b)=g(a*H)\#g(b*H)$$

(3) ليكن $a\in G$

$$\Rightarrow\quad f(a)=g(a*H)=g(®(a))=(g\circ®)(a)\ \ \text{لان}\ \ ®(a)=a*H\quad\Rightarrow\quad f=g\circ®$$

وأخيرا نبرهن الوحدانية : **نفرض توجد دالة أخرى** $h:G/H\to G'$ بحيث ان $f=h\circ®$

ليكن $a\in G\quad\Rightarrow\quad g(a*H)=f(a)=(h\circ®)(a)=h(®(a))=h(a*H)\quad\Rightarrow\quad h=g$.

ملاحظة

(1) **الدالة** $g:G/H\to G'$ في مبرهنة التحليل تسمى بالدالة المحتثة.

(2) **الدالة** $g:G/H\to G'$ **شاملة** :

لأنه لو فرضنا $b\in G'$

بما ان $f:G\to G'$ **شاملة** $\Leftarrow$ يوجد $a\in G$ بحيث ان $f(a)=b\quad\Rightarrow\quad b=f(a)=g(a*H)$

وهذا يعني انه يوجد $a*H\in G/H$ بحيث ان $g(a*H)=b$.

نتيجة(16.7)

الدالة $g : G / H \to G'$ في مبرهنة التحليل تكون متباينة أذا وفقط أذا كان $\ker(f) \subseteq H$.

البرهان :

$$\ker(g) = \{a * H : g(a * H) = e'\} = \{a * H : f(a) = e'\} = \{a * H : a \in \ker(f)\} = ®(ker(f))$$

حيث e' تمثل العنصر المحايد في الزمرة $(G', \#)$

وكن للشرط الضروري والكافي لتكون الدالة $g : G / H \to G'$ تكون متباينة إذا وفقط إذا كان $\ker(g) = e * H = H$ وفي هذه الحالة يكون الشرط الضروري والكافي هو $®(\ker(f)) = H$ **والذي** يكافئ الاحتواء $\ker(f) \subseteq H$.

ملاحظة

على ضوء المتساوية $f = g \circ ®$ ، غالبا ما يوصف الاستنتاج من مبرهنة التحليل بقولنا ان الدالة f يمكن ان تحلل ضمن زمرة القسمة $(G / H, \otimes)$. **أي بالتناوب .فان** f يمكن ان تحلل ®.

مثال(17.7)

إذا كانت $(G', \#)$ زمرة ابدالية فان f يمكن دائما ان تحلل ضمن زمرة القسمة المبادلة $(G / [G, G], \otimes)$ **وكذلك** $[G, G] \subseteq \ker(f)$

$$[a, b] = a * b * a^{-1} * b^{-1}$$

$$[a, b]) = f(a * b * a^{-1} * b^{-1}) = f(a) \# f(b) \# f(a^{-1}) \# f(b^{-1}) = f(a) \# f(b) \# (f(a))^{-1} \# (f(b))^{-1} = [f(a), f(b)]$$

وبما ان $(G', \#)$ **ابدالية** $\Leftarrow [f(a), f(b)] = e' \Leftarrow f([a,]) = e' \Leftarrow [a, b] \in \ker(f)$

مبرهنة(17.7) المبرهنة الأساسية (Fundamental Theorem)

إذا كانت f **تماثل من الزمرة** $(G, *)$ **على الزمرة** $(G', \#)$ **فان** $(G / \ker(f), \otimes) \cong (G', \#)$

البرهان :

نفس اسلوب برهان مبرهنة التحليل .

ملاحظة

إذا أبدلت الكلمة " **على**" في منطوق المبرهنة الأساسية بكلمة "**في** " أي ليس بالضرورة ان تكون **الدالة** f **شاملة فان** $(G / \ker(f), \otimes) \cong (f(G), \#)$

مثال(18.7)

(1) **لتكن** $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\{-1, 1\}, \cdot)$ دالة معرفة بالصيغة $f(n) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{Z}_e \\ -1, & n \in \mathbb{Z}_0 \end{cases}$ **لكل** $n \in \mathbb{Z}$

نلاحظ ان الدالة f **تماثل وان** $\ker(f) = \mathbb{Z}_e$ **وكذلك** $\mathbb{Z} / \ker(f) = \mathbb{Z} / \mathbb{Z}_e = \{\mathbb{Z}_e, \mathbb{Z}_0\}$

باستخدام المبرهنة الأساسية نحصل على $(\{\mathbb{Z}_e, \mathbb{Z}_0\}, \otimes) \cong (\{-1, 1\}, \cdot)$

(2) **لتكن** $(G, *)$ **زمرة** ، $a \in G$. **نعرف الدالة** $f : (\mathbb{Z}, +) \to (G, *)$ بالصيغة $f(n) = a^n$ **لكل** $n \in \mathbb{Z}$ **فان**

$$(\mathbb{Z} / \ker(f), \otimes) \cong ((a), *)$$

مبرهنة(19.7)

لتكن $(G, *)$ زمرة وليكن $a \in G$.**عرف الدالة** $\pm_a : G \to G$ بالصيغة $\pm_a(x) = a * x * a^{-1}$ **لكل** $x \in G$ **فان** $\pm_a \in A(G)$.

البرهان :

(1) يجب ان نبرهن $\pm_a$ **تماثل** : ليكن $x , y \in G$

$$\pm_a(x*y) = a*(x*y)*a^{-1} = (a*x*a^{-1})*(a*y*a^{-1}) = \pm_a(x)*\pm_a(y)$$

$\Leftarrow$ $\pm_a$ **تماثل**

(2) يجب ان نبرهن $\pm_a$ **شاملة** : ليكن $y \in G$

نضع $x = a^{-1}*y*a \quad \Leftarrow \quad x \in G$ **وكذلك**

$$\pm_a(x) = a*x*a^{-1} = a*(a^{-1}*y*a)*a^{-1} = (a*a^{-1})*y*(a*a^{-1}) = y$$

$\Leftarrow$ $\pm_a$ **تماثل**

(3) يجب ان نبرهن $\pm_a$ متباينة : ليكن $x , y \in G$ بحيث ان $\pm_a(x) = \pm_a(y)$

$\Leftarrow \quad a*x*a^{-1} = a*y*a^{-1} \quad \Leftarrow \quad x = y \quad \Leftarrow$ $\pm_a$ متباينة .

ملاحظة

- الدوال التي من الصيغة $\pm_a$ ، $a \in G$ **تسمى بالتشاكل الداخلي** (Inner Automorphism) **للزمرة** $(G,*)$ **المتولدة بواسطة العنصر** a **سنرمز** لمجموعة هذه التشاكلات الداخلية بالرمز $Inn(G)$، **أي أن** $Inn(G) = \{\pm_a : a \in G\}$ **.**
- **إذا كانت** $(G,*)$ زمرة ابدالية فان $I(G)$ تحتوي على عنصر واحد فقط وهو الدالة الذاتية ، أي ان $Inn(G) = \{I_G\}$.

مبرهنة(20.7)

لتكن $(G,*)$ **زمرة فان** $(Inn(G),\circ)$ حيث $\circ$ تمثل تركيب الدوال يشكل زمرة تسمى بزمرة التشاكلات الداخلية (Inner Automorphisms) **للزمرة** $(G,*)$. وفي الحقيقة $(Inn(G),\circ)$ تشكل زمرة جزئية سوية من الزمرة $(A(G),\circ)$.

البرهان :

(1) ليكن $\pm_a , \pm_b \in Inn(G)$

$$(\pm_a \circ \pm_b)(x) = \pm_a(\pm_b(x)) = \pm_a(b*x*b^{-1}) = a*(b*x*b^{-1})*a^{-1} = (a*b)*x*(a*b)^{-1} = \pm_{a*b}(x)$$

$\Leftarrow \quad \pm_a \circ \pm_b = \pm_{a*b} \quad \Leftarrow \quad \pm_a \circ \pm_b \in Inn(G)$

(2) ليكن $\pm_a \in Inn(G)$

$\Leftarrow \quad \pm_a \circ \pm_e = \pm_{a*e} = \pm_a$ **وكذلك** $\Leftarrow \quad \pm_e \circ \pm_a = \pm_{e*a} = \pm_a \quad \Leftarrow \quad \pm_e$ عنصر محايد

(3) ليكن $\pm_a \in Inn(G)$

$\Leftarrow \quad \pm_a \circ \pm_{a^{-1}} = \pm_{a*a^{-1}} = \pm_e$ **وكذلك** $\Leftarrow \quad \pm_{a^{-1}} \circ \pm_a = \pm_{a^{-1}*a} = \pm_e \quad \Leftarrow \quad \pm_{a^{-1}}$ نظير **العنصر** $\pm_a$

بما ان تركيب الدوال عملية تجميعية $\Leftarrow$ $(Inn(G),\circ)$ زمرة جزئية من الزمرة $(A(G),\circ)$.

(4) بقي ان نبرهن $(Inn(G),\circ)$ سوية : ليكن $\pm_a \in Inn(G), \quad f \in A(G)$

$$(f\circ \pm_a \circ f^{-1})(x)=f(\pm_a\circ f^{-1})(x)=f(\pm_a(f^{-1})(x))=f(a*f^{-1}(x)*a^{-1})=f(a)*f(f^{-1}(x))*f(a^{-1})$$
$$=f(a)*x*(f(a))^{-1}=\pm_{f(a)}(x)$$

$\Leftarrow \quad f\circ\pm_a\circ f^{-1}\in Inn(G)$

مبرهنة (21.7)

أذا كانت $(G,*)$ **زمرة فان** $(G/Cent(G),\otimes)\cong(Inn(G),\circ)$

البرهان :

لتكن $f:G\to Inn(G)$ دالة معرفة بالصيغة $f(a)=\pm_a$ **لكل** $a\in G$

من الواضح ان f **دالةشاملة**

ليكن $a,b\in G \Leftarrow f(a*b)=\pm_{a*b}=\pm_a\circ\pm_b=f(a)\circ f(b) \Leftarrow f$ **تماثل**

$\ker(f)=\{a\in G: f(a)=e'=\pm_e\}=\{a\in G:\pm_a=\pm_e=I_G\}$

ومن تعريف تساوي الدالتين نستنتج ان $a\in\ker(f)$ **إذا وفقط إذا كان** $a*x*a^{-1}=x$ **لكل** $x\in G$ وبالتالي يكون

$a\in\ker(f)$ **إذا وفقط إذا كان** $a*x=x*a$ **لكل** $x\in G \Leftarrow a\in\ker(f)$ **إذا وفقط إذا كان** $a\in Cent(G)$ **لكل** $x\in G$

$\Leftarrow Cent(G)=\ker(f)$. باستخدام المبرهنة الأساسية ، نحصل على

$(G/Cent(G),\otimes)\cong(Inn(G),\circ)$.

مبرهنة(22.7)

ليكن f **تماثل من الزمرة** $(G,*)$ **على الزمرة** $(G',\#)$ **ولتكن** $H\subseteq G$ بحيث أن $\ker(f)\subseteq H$ **فان** $H=f^{-1}(f(H))$.

البرهان :

بما ان $H\subseteq f^{-1}(f(H))$ **لأي** $H\subseteq G$. بقي ان نبرهن $f^{-1}(f(H))\subseteq H$

ليكن $a\in f^{-1}(f(H)) \Leftarrow f(a)\in f(H) \Leftarrow$ يوجد $h\in H$ بحيث ان $f(a)=f(h)$

$\Leftarrow f(a)\#(f(h))^{-1}=f(h)\#(f(h))^{-1} \Leftarrow f(a*h^{-1})=e' \Leftarrow a*h^{-1}\in\ker(f)$

بما ان

$\ker(f)\subseteq H \Leftarrow a*h^{-1}\in H \Leftarrow (a*h^{-1})*h\in H \Leftarrow a\in H \Leftarrow f^{-1}(f(H))\subseteq H$

مبرهنة (23.7) مبرهنة التقابل (Correspondence Theorem)

يوجد تقابل متباين بين تلك الزمرة الجزئية $(H,*)$ **من الزمرة** $(G,*)$ بحيث أن $\ker(f)\subseteq H$ **ومجموعة** كل الزمر الجزئية $(H',\#)$ **من الزمرة** $(G',\#)$ بالتحديد H' المعرفة بالصيغة $H'=f(H)$.

البرهان :

(1) يجب ان نبرهن التقابل المشار إليه هو شامل ، بعبارة أخرى

إذا كانت $(H',\#)$ أي زمرة جزئية للزمرة $(G',\#)$ فيجب ان نعطي زمرة جزئية ما مثل $(H,*)$ **للزمرة** $(G,*)$ **مع كون** $\ker(f)\subseteq H$ بحيث يكون لها $f(H)=H'$ لننجز هذا يكفي ان نأخذ $H=f^{-1}(H')$

$\Leftarrow (f^{-1}(H'),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ ، **أي ان** $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

بما ان $e'\in H' \Leftarrow \ker(f)=f^{-1}\{e'\}\subseteq f^{-1}(H')$

بما ان f **شامل** $\Leftarrow f(f^{-1}(H'))=H'$

الآن يجب ان نبين على ان هذا التقابل متباين

لتكن $(H_1,*)$ ، $(H_2,*)$ زمرتين جزئيتين للزمرة $(G,*)$ بحيث $\ker(f)\subseteq H_1,\ \ \ker(f)\subseteq H_2$ **فإذا كان** $f(H_1)=f(H_2)$

$\Leftarrow \quad f^{-1}(f(H_1)) = f^{-1}(f(H_2)) \quad \Leftarrow \quad H_1 = H_2$

ملاحظة

يمكن تطبيق المبرهنة في حالة الزمر الجزئية السوية وذلك باخذ الدالة القانونية ® ، **أي ان**
$® : G \to G/H$ بحيث ان $®(a) = a * H$ **لكل** $a \in G$

نتيجة (24.7)

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$. هنالك تقابل متباين بين تلك الزمرة الجزئية $(K,*)$ **من الزمرة** $(G,*)$ بحيث أن $H \subseteq K$ ومجموعة كل الزمر الجزئية من زمرة القسمة $(G/H,\otimes)$.

مثال(25.7)

إذا كانت $(G,*)$ **زمرة** دائرية منتهية رتبتها n **فان** $(G,*)$ لها زمرة جزئية واحدة رتبتها m **لكل قاسم موجب** m **بالنسبة إلى** n ولا تمتلك أية زمرة جزئية فعلية أخرى . **لاحظ ان**
بما ان $(G,*) \cong (Z_n,+_n)$
فلا يوجد نقص في العمومية عند تعاملنا مع $(Z_n,+_n)$. بالإضافة إلى هذا $(\mathbb{Z}/(n),\otimes) = (Z_n,+_n)$ ،
وحسب النتيجة أعلاه وجود تقابل متباين بين تلك الزمر الجزئية للزمرة $(\mathbb{Z},+)$ **التي تحتوي المجموعة** (n) والزمرة الجزئية للزمرة $(Z_n,+_n)$

مبرهنة(26.7)

ليكن f **تماثل من الزمرة** $(G,*)$ **على الزمرة** $(G',\#)$. **أذا كانت** $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$ بحيث أن $\ker(f) \subseteq H$ **فان** $(G/H,\otimes) \cong (G'/f(H),\otimes')$.

البرهان :

بما ان $f : (G,*) \to (G',\#)$ **تماثل شامل** ، $(H,*)$زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G,*)$
$\Leftarrow$ $(f(H),\#)$ يكون زمرة جزئية سوية للزمرة $(G',\#)$ ، وبهذا تكون $(G'/f(H),\otimes')$ زمرة

دعنا الآن نعرف الدالة $g : G \to G'/f(H)$ **على النحو** $g = ®' \circ f$ حيث $®' : G' \to G'/f(H)$
لاحظ ان g **تحدد لكل عنصر** $a \in G$ بالصيغة $g(a) = ®'(f(a)) = f(a)\#f(H)$
بما ان كل من $f, ®'$ **تماثل فان** g **تماثل**
بقي ان نبرهن $\ker(g) = H$
بما ان $f(H) = e'\#f(H)$ تمثل العنصر المحايد للزمرة $(G'/f(H),\otimes')$

$$\ker(g) = \{a \in G : g(a) = f(H)\} = \{a \in G : f(a)\#f(H) = f(H)\} = \{a \in G : f(a) \in f(H)\} = f^{-1}(f(H))$$

وعليه $\ker(f) \subseteq H \quad \Leftarrow \quad H = f^{-1}(f(H)) \quad \Leftarrow \quad \ker(g) = H$
وعليه باستخدام المبرهنة الأساسية نحصل على $(G/H,\otimes) \cong (G'/f(H),\otimes')$

ملاحظة

يمكن برهان هذه المبرهنة بدون المبرهنة الأساسية وكالاتي :
نعرف الدالة $g : G/H \to G'/f(H)$ بحيث ان $g(a*H) = f(a)\#f(H)$ بسهولة نبين ان g **معرفة** تعريفا حسنا ، وإنها تماثل تقابلي .

نتيجة (27.7)

ليكن f **تماثل من الزمرة** $(G,*)$ **على الزمرة** $(G',\#)$. **أذا كانت** $(H',\#)$ زمرة جزئية سوية **من الزمرة** $(G',\#)$ **فان** $(G/f^{-1}(H'),\otimes) \cong (G'/H',\otimes')$

البرهان :

بما ان $(H',\#)$ زمرة جزئية سوية للزمرة $(G',\#)$ $\Leftarrow$ $(f^{-1}(H'),*)$ زمرة جزئية سوية **للزمرة** $(G,*)$ **وكذلك تكون** $(G/f^{-1}(H'),\otimes)$ **زمرة بالإضافة إلى ذلك** $\ker(f)\subseteq f^{-1}(H')$
وباستخدام المبرهنة() **نحصل على** $(G/f^{-1}(H'),\otimes)\cong(G'/f(f^{-1}(H')),\otimes')$
بما ان الدالة $f:G\to G'$ **شاملة** $\Leftarrow$ $f(f^{-1}(H'))=H'$
$\Leftarrow$ $(G/f^{-1}(H'),\otimes)\cong(G'/H',\otimes')$

مبرهنة(28.7)

أذا كانت $(H,*)$ ، $(K,*)$ زمرتين جزئيتين من الزمرة $(G,*)$ بحيث أن $(K,*)$سوية فان
$(H/H\cap K,\otimes)\cong(H*K/K,\otimes')$

البرهان :
(1) يجب ان نبرهن $(H\cap K,*)$ زمرة جزئية سوية : **أي**
نبرهن $h*(H\cap K)*h^{-1}\subseteq H\cap K$ **لكل** $h\in H$
ليكن $h\in H$ ، $x\in H\cap K$ $\Leftarrow$ $x\in H$ **و** $x\in K$
بما ان $(K,*)$ زمرة جزئية سوية $\Leftarrow$ $h*x*h^{-1}\in K$
بما ان $x,h\in H$ $\Leftarrow$ $h*x*h^{-1}\in H$ $\Leftarrow$ $h*x*h^{-1}\in H\cap K$ وعليه $(H\cap K,*)$ زمرة جزئية سوية
(2) يجب ان نبرهن $(H*K,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$
ليكن $x,y\in H*K$ $\Leftarrow$ $x=h_1*k_1,\quad y=h_2*k_2$ **حيث** $h_1,h_2\in H,\ k_1,k_2\in K$

$$x*y^{-1}=(h_1*k_1)*(h_2*k_2)^{-1}=(h_1*k_1)*(k_2^{-1}*h_2^{-1})=h_1*(k_1*k_2^{-1})*h_2^{-1}=h_1*k_3*h_2^{-1},\quad k_3=k_1*k_2^{-1}$$

$$x*y^{-1}=(h_1*h_2^{-1})*(h_2*k_3*h_2^{-1})=h*k,\quad h=h_1*h_2^{-1},\quad k=h_2*k_3*h_2^{-1}$$

$\Leftarrow$ $x*y^{-1}\in H*K$ $\Leftarrow$ $(H*K,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$
(3) **نعرف الدالة** $¨:H\to H*K/K$ بالصيغة $¨(h)=h*k$ **لكل** $h\in H$
لاحظ ان $H=H*e\subseteq H*K$ لهذا فان ¨ يمكن الحصول عليها بتركيب الاحتواء
$\mathrm{I}_H:H\to H*K$ مع الدالة القانونية $®_K:H*K\to H*K/K$ ، **بعبارة أخرى**
$¨=®_K\circ\mathrm{I}_H$. **نلاحظ ان** ¨ **تماثل وان** $¨(H)=H*K/K$
الآن يجب ان نبرهن $\ker(¨)=H\cap K$
نلاحظ ان $K=e*K$ يمثل العنصر المحايد لزمرة القسمة $(H*K/K,\otimes)$

$$\ker(¨)=\{h\in H:¨(h)=K\}=\{h\in H:h*K=K\}=\{h\in H:h\in K\}=H\cap K$$

وباستخدام المبرهنة الأساسية ، نحصل على $(H/H\cap K,\otimes)\cong(H*K/K,\otimes')$.

مثال(29.7)

كل من $((4),+),\quad((3),+)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ ، **إضافة إلى ذلك** $(3)+(4)=\mathbb{Z}$ ،
$(3)\cap(4)=(12)$
باستخدام المبرهنة أعلاه نحصل $((3)/(12),\otimes)\cong(\mathbb{Z}/(4),\otimes')$

ملاحظة

يمكن التأكد من
بما ان $(\mathbb{Z}/(4),\otimes')=(Z_4,+_4),\quad((3)/(12),\otimes)=(\{0,3,6,9\},+_{12})$ **ولذلك فان**
$(\{0,3,6,9\},+_{12})\cong(Z_4,+_4)$

تمارين (7)

1.7 بين فيما إذا كانت أية من الدوال التالية تمثل تماثلا أم لا ؟ مع البرهان

(1) **الدالة** $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$ معرفة بالصيغة $f(x)=-x$ **لكل** $x\in\mathbb{R}$

(2) **الدالة** $f:(\mathbb{R}^*,\cdot)\to(\mathbb{R},+)$ معرفة بالصيغة $f(x)=|x|$ **لكل** $x\in\mathbb{R}^*$

(3) **الدالة** $f:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z},+)$ معرفة بالصيغة $f(x)=x+1$ **لكل** $x\in\mathbb{Z}$

(4) **الدالة** $f:(\mathbb{R}^*,\cdot)\to(\mathbb{R},+)$ معرفة بالصيغة $f(x)=x^2$ **لكل** $x\in\mathbb{R}^*$

(5) **الدالة** $f:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Q},+)$ معرفة بالصيغة $f(x)=\dfrac{x}{q}$ (q عدد صحيح ثابت غير **صفري) لكل** $x\in\mathbb{Z}$

(6) **الدالة** $f:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z},+)$ معرفة بالصيغة $f(x)=nx$ (n عدد صحيح ثابت لكل $x\in\mathbb{Z}$

2.7 ليكن f **تماثل من الزمرة** $(G,*)$ **إلى الزمرة** $(G',\#)$.

(1)**إذا كانت** e تمثل العنصر المحايد للزمرة $(G,*)$. برهن على ان $\ker(f)=f^{-1}(f(e))$

(2) **إذا كانت** $(G',\#)$ زمرة ابدالية . برهن على ان $[G,G']\subseteq\ker(f)$

3.7 **لتكن** $(Z_8,+_8)$ **زمرة الأعداد الصحيحة** معيار 8، $((a),*)$ زمرة دوارة منتهية رتبتها 12 . **نعرف الدالة**

$f:Z_8\to(a)$ بالصيغة

$$f(0)=f(4)=e,\quad f(1)=f(5)=a^3,\quad f(2)=f(6)=a^6,\quad f(3)=f(7)=a^9$$

(1) برهن على ان الدالة f **تماثل**

(2) صف الزمرتين الجزئيتين $(\ker(f),+_8)$, $(f(Z_8),*)$,

(3). برهن على ان $(f^{-1}H),+_8)$ زمرة جزئية من الزمرة $(Z_8,+_8)$ **إذا علمت ان** $H=\{e,a^6\}$

4.7 **اثبت ان الدالة** $f:(\mathbb{Z},+)\to(\{1,-1,i,-i\},\cdot)$ المعرفة بالصيغة $f(n)=i^n$ **لكل** $n\in\mathbb{Z}$ **تكون** تماثل، ثم عين نواته.

5.7 ليكن f **تماثل من الزمرة** $(G,*)$ إلى نفسها ، ولتكن $H=\{a\in G: f(a)=a\}$. برهن على ان $(H,*)$ **زمرة** جزئية من $(G,*)$.

6.7 **لتكن** $(G,*)$ **زمرة ، ولتكن** $a\in G$. برهن على ان $f:G\to G$ المعرفة بالصيغة $f(x)=a*x*a^{-1}$ **لكل** $x\in G$ تكون تماثل تقابلية .

7.7 **لتكن كل من** $(G,*)$ ، $(G',\#)$ زمرة وليكن $(G,*)\cong(G',\#)$. برهن على ان : **إذا كانت الزمرة** $(G,*)$ ابدالية **(دوارة)** **فان الزمرة** $(G',\#)$ ابدالية **(دوارة)**.

8.7 اثبت ان لا يوجد تشاكل تقابلي بين الزمرتين $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

9.7 برهن على ان كل الزمر المنتهية رتبتها 2 **تكون متشاكلة**

10.7 **إذا كانت** $G=\{1,\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\}$ حيث $i^2=-1$. برهن على ان $(G,\cdot)$ **زمرة**. عين فيما إذا كان $(G,\cdot)\cong(Z_3,+_3)$

11.7 ليكن كل من f ، g تماثل من الزمرة $(G,*)$ إلى الزمرة $(G',\#)$. عرف الدالة $h:G \to G'$ بالصيغة

$g(a)=f(a)\#g(a)$ لكل $a \in G$. برهن على h تماثل إذا كانت الزمرة $(G',\#)$ ابدالية .

12.7 ليكن f تماثل من الزمرة البسيطة $(G,*)$ على الزمرة $(G',\#)$. برهن على ان أما $(G,*) \cong (G',\#)$ أو التماثل f تافه.

13.7 لتكن $(G,*)$ زمرة . برهن على الدالة $f:G \to G$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^{-1}$ لكل $x \in G$ تكون تماثل إذا وفقط

إذا كانت الزمرة $(G,*)$ ابدالية.

8. حاصل الضرب المباشر للزمر Direct Product of Groups

لتكن كل من A,B .مجموعة الضرب الديكارتي(Cartesian Product) للمجموعتين A,B يرمز له بالرمز $A\times B$ ويعرف بالشكل $A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$ ، ويرمز أحيانا للمجموعة $A\times A$ بالرمز A^2 .

من الواضح أن $A\times B\neq B\times A$ وكذلك نلاحظ انه إذا كانت كل من A,B مجموعة غير خالية فان $A\times B$ غير خالية أيضا.

مبرهنة(1.8)

لتكن كل من $(G_1,*),(G_2,\#)$ زمرة.فان $(G_1\times G_2,\circ)$ تكون زمرة (وتسمى زمرة حاصل ضرب للزمرتين $(G_1,*),(G_2,\#)$

حيث $\circ$ معرفة بالصيغة $(a,b)\circ(c,d)=(a*c,b\#d)$ وتكون $(G_1\times G_2,\circ)$ أبدالية أذا وفقط أذا كانت كل من $(G_1,*),(G_2,\#)$ أبدالية. وإذا كانت كل من $(G_1,*),(G_2,\#)$ زمرة منتهية فان $0(G_1\times G_2)=0(G_1)\times 0(G_2)$.

البرهان :

(1) ليكن $(a,b),(c,d)\in G_1\times G_2$

$$\Leftarrow\ a,c\in G_1\ \Leftarrow\ a*c\in G_1 \text{ وكذلك } \Leftarrow\ b,d\in G_2\ \Leftarrow\ b\#d\in G_2$$

$$\Leftarrow\ (a*c,b\#d)\in G_1\times G_2\ \Leftarrow\ (a,b)\circ(c,d)\in G_1\times G_2$$

(2) ليكن $(a,b),(c,d),(e,f)\in G_1\times G_2$

$$((a,b)\circ(c,d))\circ(e,f)=(a*c,b\#d)\circ(e,f)=((a*c)*e,(b\#d)\#f)=(a*(c*e),b\#(d\#f))$$
$$=(a,b)\circ(c*e,d\#f)=(a,b)\circ((c,d)\circ(e,f))$$

$\Leftarrow$ $\circ$ تجميعية

(3) إذا كان e_1,e_2 يمثلان العنصران المحايدان للزمرتين $(G_1,*),(G_2,\#)$ على التوالي فان $e=(e_1,e_2)$ يكون عنصر محايد للعملية $\circ$ لان لكل $(a,b)\in G_1\times G_2$ فان

$$(a,b)\circ e=(a,b)\circ(e_1,e_2)=(a*e_1,b\#e_2)=(a,b) \text{ وكذلك }$$
$$e\circ(a,b)=(e_1,e_2)\circ(a,b)=(e_1*a,e_2\#b)=(a,b)$$

(4) ليكن $(a,b)\in G_1\times G_2\ \Leftarrow\ (a,b)^{-1}=(a^{-1},b^{-1})\in G_1\times G_2$

$$(a,b)\circ(a,b)^{-1}=(a,b)\circ(a^{-1},b^{-1})=(a*a^{-1},b\#b^{-1})=(e_1,e_2)=e$$

وكذلك $(a,b)^{-1}\circ(a,b)=(a^{-1},b^{-1})\circ(a,b)=(a^{-1}*a,b^{-1}\#b)=(e_1,e_2)=e$

$\Leftarrow$ $(G_1\times G_2,\circ)$ زمرة .

مثال(2.8)

(1) $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\circ)$ حاصل ضرب الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ مع نفسها حيث $(a,b)\circ(c,d)=(a+c,b+d)$ عنصرها المحايد هو $(0,0)$

ونظير العنصر (a,b) هو $(-a,-b)$.

(2) $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Q},\circ)$ حاصل ضرب الزمرتين $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ حيث $(a,b)\circ(c,d)=(a+c,bd)$ عنصرها المحايد هو $(0,1)$

ونظير العنصر (a,b) هو $(-a,b^{-1})$

(3) إذا كانت $G = Z_3 \times Z_2$ فان $G = \{0,1,2\} \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1.0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$ ولان $(Z_2 \times Z_3, \circ)$ زمرة

ابدالية حيث $(a,b)\circ(c,d) = (a +_3 c, b +_2 d)$ عنصرها المحايد هو $(0,0)$ ونظير العنصر (a,b) هو $(-a, b^{-1})$

مبرهنة(3.8)

لتكن كل من $(G_1,*),(G_2,\#)$ زمرة فان $(G_1 \times G_2, \circ) \cong (G_2 \times G_1, \circ)$

البرهان :

نعرف الدالة $f : (G_1 \times G_2, \circ) \to (G_2 \times G_1, \circ)$ بالصيغة $f(a,b) = (b,a)$ لكل $(a,b) \in G_1 \times G_2$

بسهولة اثبات الدالة f **تماثل تقابلي** .

مبرهنة(4.8)

لتكن كل من $(G_1,*),(G_2,\#)$ زمرة ولتكن $A = e_1 \times G_2, \quad B = G_1 \times e_2$ فان

(1) كل من $(A,\circ),(B,\circ)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G_1 \times G_2, \circ)$.

(2) $(G_1,*) \cong (B,\circ), \quad (G_2,\#) \cong (A,\circ)$.

البرهان :

$$A = e_1 \times G_2 = \{(e_1,b) : b \in G_2\}, \quad B = G_1 \times e_2 = \{(a,e_2) : a \in G_1\}$$

(1) بما ان $(e_1,e_2) \in A \quad \Leftarrow \quad A \neq \phi$

ليكن $(e_1,b_1),(e_1,b_2) \in A$ حيث $b_1,b_2 \in G_2 \quad \Leftarrow \quad b_1 \# b_2^{-1} \in G_2$ لان $(G_2,\#)$ زمرة

$$\Leftarrow \quad (e_1,b_1)\circ(e_1,b_2)^{-1} = (e_1,b_1)\circ(e_1,b_2^{-1}) = (e_1, b_1 \# b_2^{-1}) \in A$$

$\Leftarrow$ $(A,\circ)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G_1 \times G_2, \circ)$.

ليكن $(e_1,b) \in A$ ، $(x,y) \in G_1 \times G_2 \quad \Leftarrow \quad b, y \in G_2 \quad \Leftarrow \quad y^{-1} \# b \# y \in G_2$

$$\Leftarrow \quad (x,y)^{-1}\circ(e_1,b)\circ(x,y) = (x^{-1},y^{-1})\circ(e_1,b)\circ(x,y) = (x^{-1} * e_1 * x, y^{-1} \# b \# y) = (e_1, y^{-1} \# b \# y) \in A$$

$\Leftarrow$ $(A,\circ)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G_1 \times G_2, \circ)$

وبالمثل نبرهن $(B,\circ)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G_1 \times G_2, \circ)$

(2) **نعرف الدالة** $f : G_2 \to A$ بالصيغة $f(b) = (e_1,b)$ **لكل** $b \in G_2$

(ا) ليكن $b_1,b_2 \in G_2 \quad \Leftarrow \quad f(b_1 \# b_2) = (e_1, b_1 \# b_2) = (e_1,b_1)\circ(e_1,b_2) = f(b_1)\circ f(b_2)$

$\Leftarrow \quad f$ **تماثل**

(ب) ليكن $b_1,b_2 \in G_2$ بحيث ان $f(b_1) = f(b_2) \quad \Leftarrow \quad (e_1,b_1) = (e_1,b_2) \quad \Leftarrow \quad b_1 = b_2$

$\Leftarrow \quad f$ متباينة

(ج) ليكن $y \in A \Leftarrow$ يوجد $b \in G_2$ بحيث ان $y = (e_1,b)$ **ولكن** $f(b) = (e_1,b)$

$\Leftarrow$ يوجد $b \in G_2$ بحيث $f(b) = y \Leftarrow \quad f$ **شاملة**

وعليه $(G_2,\#) \cong (A,\circ)$ وبالمثل نبرهن $(G_1,*) \cong (B,\circ)$

مبرهنة(5.8)

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G_1,*)$ ، ولتكن $(K,\#)$ زمرة جزئية سوية من **الزمرة** $(G_2,\#)$ ، **فان**

(1) $(H \times K, \circ)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G_1 \times G_2, \circ)$

(2) $(G_1 \times G_2 / H \times K, \otimes) \cong ((G_1/H)\times(G_2/K), \otimes)$

البرهان :

بما ان $e_1 \in H,\quad e_2 \in K \quad \Leftarrow \quad (e_1,e_2)\in H\times K \quad \Leftarrow \quad H\times K \neq ¤$

ليكن $(a,b),(c,d)\in H\times K \quad \Leftarrow \quad a,c\in H, b,d\in K \quad \Leftarrow \quad a*c^{-1}\in H,\quad b\#d^{-1}\in K$

$\Leftarrow \quad (a,b)\circ(c,d)^{-1}=(a,b)\circ(c^{-1},d^{-1})=(a*c^{-1},b\#d^{-1})\in H\times K$

$\Leftarrow$ $(H\times K,\circ)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G_1\times G_2,\circ)$

ليكن $(a,b)\in H\times K$ ، $(x,y)\in G_1\times G_2 \quad \Leftarrow \quad x\in G_1, a\in H,\quad y\in G_2, b\in K$

بما ان $(H,*)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G_1,*)$ $\quad \Leftarrow \quad x^{-1}*a*x\in H$

وكذلك $(K,\#)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G_2,\#)$ $\quad \Leftarrow \quad y^{-1}\#b\#y\in K$

$\Leftarrow \quad (x,y)^{-1}\circ(a,b)\circ(x,y)=(x^{-1},y^{-1})\circ(a,b)\circ(x,y)=(x*a*x^{-1},y\#b\#y^{-1})\in H\times K$

$\Leftarrow$ $(H\times K,\circ)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G_1\times G_2,\circ)$

(2) بما ان كل من $®_1:G_1\to G_1/H,\quad ®_2:G_2\to G_2/K$ دالة تماثل شامل

نعرف الدالة $f:G_1\times G_2\to(G_1/H)\times(G_2/K)$ بالصيغة $f(a,b)=(®_1(a),®_2(b))$ لكل $(a,b)\in G_1\times G_2$

(أ) ليكن $(a,b),(c,d)\in G_1\times G_2 \quad \Leftarrow \quad a,c\in G_1, b,d\in G_2$

$$f((a,b)\circ(c,d))=f(a*c,b\#d)=(®_1(a*c),®_2(b\#d))=((a*c)*H),(a\#c)\#H))$$

$$((a,b)\circ(c,d))=((a*H)\otimes(c*H),(a\#H)\otimes(c\#H))=(®_1(a),®_2(b))\otimes(®_1(c),®_2(d))=f(a,b)\otimes f(c,d)$$

$\Leftarrow \quad f$ تماثل

(ب) بما ان كل من $\pi_1,®_2$ دالة شاملة $\Leftarrow$ f دالة شاملة ، باستخدام المبرهنة الأساسية (مبرهنة 17.7)،

نحصل على $(G_1\times G_2/\ker(f),\otimes)\cong((G_1/H)\times(G_2/K),\otimes)$

لكن $\ker(f)=\{(a,b)\in G_1\times G_2 : f(a,b)=(H,K)\}$

$$\ker(f)=\{(a,b)\in G_1\times G_2 : (®_1(a),®_2(b))=(H,K)\}=\{(a,b)\in G_1\times G_2 : (a*H,b\#K)=(H,K)\}$$

$$\ker(f)=\{(a,b)\in G_1\times G_2 : (a,b)H\times K\}=H\times K$$

$\Leftarrow \quad (G_1\times G_2/H\times K,\otimes)\cong((G_1/H)\times(G_2/K),\otimes)$

مبرهنة (6.8)

لتكن كل من $(K,*)$, $(H,*)$ زمرة جزئية سوية فعلية من الزمرة $(G,*)$ بحيث **أن** $H\cap K=\{e\}$, $G=H*K$ **فان** $(G,*)\cong(H\times K,\circ)$.

البرهان :

ليكن $a\in G$

بما ان $G=H*K \quad \Leftarrow \quad a\in H*K \quad \Leftarrow \quad a=h*k$ حيث $h\in H,\quad k\in K$

نعرف الدالة $f:G\to H\times K$ بالصيغة $f(a)=(h,k)$ **لكل** $a\in G$

(1) يجب ان نبرهن f معرفة تعريفا حسنا

نفرض $h_1*k_1=h_2*k_2$ بحيث ان $k_1,k_2\in K,\quad h_1,h_2\in H \quad \Leftarrow \quad h_2^{-1}*h_1=k_2*k_1$

بما ان $k_2*k_1\in K \quad \Leftarrow \quad h_2^{-1}*h_1\in K$ **ولكن** $h_2^{-1}*h_{11}\in H \quad \Leftarrow \quad h_2^{-1}*h_1\in H\cap K$

بما ان $H\cap K=\{e\} \Leftarrow h_2^{-1}*h_1=e \Leftarrow h_1=h_2$ وبالمثل نبرهن $k_1=k_2$
$\Leftarrow (h_1,k_1)=(h_2,k_2)$
$\Leftarrow f(h_1*k_1)=f(h_2*k_2) \Leftarrow f(a)=f(b) \Leftarrow f$ معرفة تعريفا حسنا
(2) يجب ان نبرهن الدالة f **تماثل** : ليكن $a,b\in G \Leftarrow a=h_1*k_1,\ b=h_2*k_2$ حيث
$h_1,h_2\in H,\quad k_1,k_2\in K$

$$f(a*b)=f((h_1*k_1)*(h_2*k_2))=f((h_1*h_2)*(k_1*k_2))=(h_1*h_2,k_1*k_2)=(h_1,k_1)\circ(h_2,k_2)=f(a)\circ f(b)$$

$\Leftarrow f$ **تماثل**
(3) يجب ان نبرهن الدالة f **شاملة** : ليكن $b\in H*K \Leftarrow b=h*k$ حيث $h\in H,\quad k\in K$
(4) يجب ان نبرهن الدالة f متباينة :

مثال(7.8)

(1) $(\mathbb{R}^*,\cdot)\cong(\mathbb{R}^+\times\{-1,1\},\circ)$ **لان كل من** $(\mathbb{R}^+,\cdot),\quad(\{-1,1\},\cdot)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(\mathbb{R}^*,\cdot)$
وكذلك
$\mathbb{R}^*=\mathbb{R}^+\cdot\{-1,1\}$ ، $\mathbb{R}^+\cap\{-1,1\}=\{1\}$
(2) **الزمرة** $(\mathbb{Z},+)$ لايمكن كتابتها على شكل $H\times K$ حيث $H\neq\{0\}$ **و** $K\neq\{0\}$
سنبرهن بطريقة التناقض : **نفرض** $(\mathbb{Z},+)\cong(H\times K,\circ)$
$\Leftarrow$ يوجد $n\in H$ ، $m\in K$ بحيث ان $n,m\in\mathbb{Z}^+ \Leftarrow nm\in\mathbb{Z}^+ \Leftarrow nm\in H\cap K$ وهذا لا يجوز.

تمارين(8)

1.8 برهن على ان $(Z_n\times Z_m,\circ)\cong(Z_{nm},+_{nm})$ **عندما** $g.c.d(n,m)=1$
2.8 ليكن $H=\{0,4,8\},\quad K=\{0,3,6,9\}$. هل ان $(Z_{12},+_{12})\cong(H\times K,\circ)$؟ **مع البرهان**.
3.8 برهن على ان الزمرة $(\mathbb{Q},+)$ لايمكن كتابتها على شكل $H\times K$ **مالم تكن** $H=\{0\}$ **أو** $K=\{0\}$
4.8 **لتكن كل من** $(G_1,*),(G_2,\#)$ **زمرة ولتكن** $A=e_1\times G_2,\quad B=G_1\times e_2$ برهن **على ان**
(1) **كل عنصر من** A **قابل للمبادلة مع كل عنصر من** B .
(2) **كل عنصر من** $G_1\times G_2$ يمكن التعبير عنه بشكل وحيد كضرب لعنصر من A بعنصر **من** B .
(3) $(G_1\times G_2/A,\otimes)\cong(B,\circ),\quad(G_1\times G_2/B,\otimes)\cong(A,\circ)$
5.8 **لتكن كل من** $(G_1,*),(G_2,\#)$ زمرة دائرية بحيث أن $0(G_1)=n,\quad 0(G_2)=m$ برهن على ان $(G_1\times G_2,\circ)$ **تكون**
دائرية أذا وفقط أذا كان كل من m,n عددا أوليا .
6.8 **لتكن** $(G,*)$ **زمرة ولتكن** $\Delta=\{(a,a):a\in G\}$ برهن على ان
(1) $(\Delta,\circ)\cong(G,*)$
(2) $(\Delta,\circ)$ زمرة جزئية سوية من الزمرة $(G\times G,\circ)$ **أذا وفقط أذا كانت** $(G,*)$ أبدالية.